

10 Integral indefinida

1. Calcula las siguientes integrales mediante cambio de variable:

a) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ ($e^x = t^2 - 1$)

b) $\int \sin^5 x dx$ ($\cos x = t$)

c) $\int \frac{1}{xL^2x} dx$ ($Lx = t$)

2. Calcula las siguientes integrales mediante integración por partes:

a) $\int \frac{Lx}{x^3} dx$

b) $\int x5^x dx$

c) $\int L^2x dx$

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{5\sqrt[5]{x^3}} dx$

b) $\int \cos x e^{\sin x} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$

b) $\int 5x^3 \sin(x^4 + 7) dx$

c) $\int e^x \cos(e^x + 1) dx$

5. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 4 \sin^2 x \cos x dx$

b) $\int x^2 e^{5x} dx$

c) $\int x + \frac{a}{x^3} dx$ a constante

6. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{6x + 8}{x^2 + 4x + 4} dx$

b) $\int (x^2 - 2x + 1)Lx dx$

c) $\int \frac{5}{(x + 3)^2} dx$

7. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

b) $\int \frac{x}{2^x} dx$

c) $\int \frac{2x + 2}{x^2 + x + \frac{1}{4}} dx$

8. Halla una función F tal que $F'(x) = x^2 - 2x + 3$ y $F(0) = 2$.

9. Halla una función F tal que $F''(x) = 6x - 10$, $F(0) = 4$ y $F(1) = 0$.

10. Halla una función F tal que $F''(x) = x \cos x$, $F'(0) = 0$ y $F(0) = 3$.

11. Calcula una primitiva de la función $f(x) = xe^{-x^2}$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

12. Calcula una primitiva de la función $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}}$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

13. De una función derivable, se conoce que $f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 2x + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y que $f(0) = 0$. Halla el valor de a .

14. Halla una función f tal que tiene un punto de inflexión en el punto $(1, 3)$ y que $f'(x) = 3x^2 - ax$.

SOLUCIONES

1. a) $\frac{2}{3}(e^x - 2)\sqrt{e^x + 1} + C$

b) $-\cos x + \frac{2 \cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$

c) $-\frac{1}{Lx} + C$

2. a) $-\frac{2Lx + 1}{4x^2} + C$

b) $\frac{5^x(xL5 - 1)}{L^25} + C$

c) $xL^2x - 2xLx + 2x + C$

3. a) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{2} + C$

b) $e^{\sin x} + C$

c) $\frac{-1}{(x-1)} + C$

4. a) $-\frac{e^{-x^3}}{3} + C$

b) $-\frac{5 \cos(x^4 + 7)}{4} + C$

c) $\sin(e^x + 1) + C$

5. a) $\frac{4 \sin^3 x}{3} + C$

b) $e^{5x} \left(\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{25} + \frac{2}{125} \right) + C$

c) $\frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2} + C$

6. a) $3L(x^2 + 4x + 4) + \frac{4}{(x+2)} + C$

b) $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) Lx - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - x + C$

c) $-\frac{5}{x+3} + C$

7. a) $x - L(1 + e^x) + C$

b) $-\frac{xL2 + 1}{2^x L^2 2} + C$

c) $L \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{x + \frac{1}{2}} + C$

8. $F(x) = \int (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C,$

si $F(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + 2$

9. $F'(x) = \int (6x - 10) dx = 3x^2 - 10x + C \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = \int (3x^2 - 10x + C) dx =$

$= x^3 - 5x^2 + Cx + K, \text{ si } F(0) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 4, \text{ si } f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = x^3 - 5x^2 + 4$

10. $F'(x) = \int x \cos x dx = \cos x + x \sin x + C,$

si $F'(0) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(x) = \cos x + x \sin x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = \int (\cos x + x \sin x - 1) dx =$

$= -x \cos x + 2 \sin x - x + K, \text{ si } F(0) = 3 \Rightarrow$

$K = 3 \Rightarrow F(x) = -x \cos x + 2 \sin x - x + 3$

11. $F(x) = \int x e^{-x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C,$ si la gráfica pasa por el origen,

$F(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2}$

12. $F(x) = \int \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 5\sqrt{1+x^2} + C,$ si la gráfica pasa por el origen,

$F(0) = 0 = C = -5 \Rightarrow F(x) = 5\sqrt{1+x^2} - 5$

13. $f(x) = \begin{cases} \sin x + c & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, debe ser continua y derivable en 0

Por ser continua en $x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow b = c = 0$

Por ser derivable en $x = 0 \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 0 = a \Rightarrow a = 1$

14. Si tiene un punto de inflexión para $x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 - a = 0 \Rightarrow a = 6,$ por

tanto, $F(x) = \int (3x^2 - 6x) dx = x^3 - 3x^2 + C,$

como su gráfica pasa por $(1, 3) \Rightarrow F(1) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 5 \Rightarrow F(x) = x^3 - 3x^2 + 5$