5 Límites y continuidad

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{1 - \sqrt{1 - x}}$

a) Halla su dominio.

b) Halla sus puntos de discontinuidad y clasifica sus discontinuidades.

2. Halla el valor de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leqslant 0 \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ \dfrac{bx + 2}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

3. Una empresa vende una máquina fotocopiadora cuya capacidad de hacer copias por minuto se va deteriorando con el paso de los años, aunque para paliar el problema aconseja hacerle una revisión al cabo de 4 años. La función que, en este caso, da el número de copias por minuto en función de los x años transcurridos viene dada por la función

$$f(x) = \begin{cases} 15 - 2x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ \dfrac{5x + 2}{x - 2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) ¿Cuántas copias hace la máquina cuando se compra?

b) ¿La revisión de los 4 años cambia el rendimiento de la máquina o no se nota el arreglo?

c) Junto con la máquina la empresa ofrece una garantía de un mínimo de 5 copias por minuto por vieja que sea la máquina. ¿Es fiable esta garantía?

d) ¿Sería válida la garantía si no se pasa la revisión?

4. José comprueba un día que está perdiendo pelo alarmantemente. La función que determina el número de pelos que pierde en función de los días, t, que pasan es $f(t) = 57t + 30$. Al décimo día de notar el problema decide ponerle remedio y compra un crecepelo que asegura no solo frenar la caída del cabello, sino que su uso prolongado la detiene completamente. José observa, ahora, que el número de pelos que pierde varía en función de $f(t) = \dfrac{150t}{t + 10}$

a) Escribe la función que describe el proceso de la caída de pelo de José.

b) ¿Notó José alguna variación el primer día que se echó el crecepelo?

c) ¿Es cierto que el producto detiene completamente la caída del cabello?

5. Demuestra que la función $f(x) = e^x + x - 2$ corta a la parte positiva del eje OX.

6. La función $f(x) = \text{tg } x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

7. ¿Se puede utilizar el teorema de Bolzano para asegurar que la ecuación $x^{24} + \dfrac{1}{x - 3} = 0$ tiene una solución en el intervalo $(0, 1)$? ¿Y en el intervalo $(2, 4)$?

8. Considera las funciones $f(x) = \sqrt{x + 3}$ y $g(x) = x^2 + 1$

a) Representa la función $(g \circ f)(x)$

b) ¿Está acotada dicha función en el intervalo $[1, 4]$?

c) ¿Cuáles son sus máximo y mínimo absolutos en este intervalo?

9. ¿Se puede asegurar que la función $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ está acotada en el intervalo $[2, 5]$? ¿Y en el intervalo $[0, 3]$?

SOLUCIONES

1. a) $Df = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, pues f no está definida si $1 - \sqrt{1 - x} = 0$.

b) En $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable si se define $f(0) = 4$, pues:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x(1 + \sqrt{1 - x})}{(1 - \sqrt{1 - x})\,(1 + \sqrt{1 - x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x(1 + \sqrt{1 - x})}{x} = 4$$

2. Es continua en 0 si $e^0 + a = b$ y es continua en 2 si $4a + b = 2b + 2$.

Por tanto: $a = 1$, $b = 2$

3. a) $f(0) = 15$ copias por minuto.

b) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 7$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 11$

Mejora el rendimiento, pues pasa de 7 a 11 copias por minuto.

c) Sí, puesto que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$

d) No, puesto que si no se hace la revisión $f(7{,}5) = 0$, es decir, la máquina deja de funcionar a los siete años y medio.

4. a) $f(t) = \begin{cases} 57t + 30 & \text{si } 0 \leqslant t < 10 \\ \dfrac{150t}{t + 10} & \text{si } t \geqslant 10 \end{cases}$

b) Sí, se frenó la caída del cabello, puesto que $\lim_{x \to 10^-} f(x) = 600$, mientras que $\lim_{x \to 10^+} f(x) = 75$.

c) No es cierto, ya que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 150$, es decir, frena la caída del cabello pero no la detiene.

5. f es continua en toda la recta real y además:

$f(0) = -1$ y $f(1) = e - 1 \cong 1{,}72$

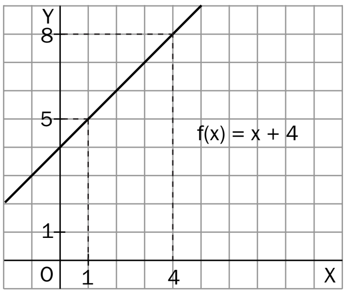
Por tanto, al aplicar el teorema de Bolzano se obtiene que f corta al eje OX en un punto del intervalo $(0, 1)$.

6. No, puesto que $f(x) = \operatorname{tg} x$ no es continua en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y, por tanto, no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

7. a) La función $f(x) = x^{24} + \dfrac{1}{x - 3}$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ y tal que $f(0) = \dfrac{-1}{3}$ y $f(1) = \dfrac{1}{2}$, es decir, cambia de signo en los extremos del intervalo y entonces por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1) / c^{24} + \dfrac{1}{c - 3} = 0$

b) No se puede asegurar que la ecuación tenga en $(2, 4)$ una solución porque f es discontinua en $x = 3 \in (2, 4)$ y no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

8. $(g \circ f) = x + 4$:



b) Sí está acotada, puesto que es continua en el intervalo y se puede aplicar el teorema de Weierstrass.

c) Al ser la función lineal y creciente, su máximo absoluto está en $f(4) = 8$ y su mínimo absoluto en $f(1) = 5$.

9. En $[2, 5]$ está acotada, pues f es continua en dicho intervalo y se puede aplicar el teorema de Weierstrass, pero en $[0, 3]$ no se puede asegurar, ya que f es discontinua en $x = 1 \in (0, 3)$. De hecho, f no está acotada en este intervalo, ya que:
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$