8 Monotonía y curvatura

1. Halla el número x que hace que el valor del determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x-1 & x+1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ sea mínimo.

2. De todos los triángulos rectángulos tales que la suma de su hipotenusa y un cateto sea 12 cm, halla el que tiene área máxima.

3. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia cuyo radio mide 2 cm.

4. Se quiere construir una piscina con forma de paralelepípedo rectangular tal que su anchura sea doble que su altura y que la suma del largo, ancho y alto sea 24 m. Halla las dimensiones que debe tener la piscina para que su capacidad sea máxima.

5. De una chapa circular de radio 10 cm se recorta un sector circular y con la lata restante se construye un embudo. Halla el sector que debe cortarse para que el embudo tenga capacidad máxima.

6. Descompón el número 45 en suma de dos números tales que el producto del cubo del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

7. La comisión que cobra un agente de seguros viene dada por la función:

$f(x) = 60\,000 - 270x + \dfrac{63x^2}{20} - \dfrac{3x^3}{500}$, donde x representa el importe, en euros, de la póliza contratada. ¿Cuál es el importe de la póliza que le garantiza una comisión máxima?

8. La cotización de las acciones de una empresa a lo largo del pasado año vino dada por la expresión $f(t) = 1{,}8 + 0{,}57t - 0{,}11t^2 + 0{,}006t^3$, donde t representa el mes del año $(0 \leqslant t \leqslant 12)$.

a) Halla los periodos del año durante los cuales creció la cotización de las acciones y durante los cuales decreció.

b) ¿Cuándo la cotización fue más alta y cuándo fue más baja? ¿Qué valor alcanzaron las acciones en esos momentos? Fíjate que estás hallando extremos en el intervalo cerrado [0, 12].

9. Los gastos anuales en publicidad de una empresa, en euros, vienen dados por la expresión $f(x) = 120\,200 - \dfrac{6\,010x^2 - 24\,040x + 6\,010}{e^{x-2}}$, donde x representa el número de años que lleva funcionando la empresa.

a) ¿Cuánto dinero se gastó la empresa en publicidad en el momento de su creación?

b) ¿En qué periodos de tiempo los gastos en publicidad crecieron? ¿En cuáles decrecieron?

c) ¿En qué año se produjeron los mayores gastos en publicidad? ¿A cuánto ascendieron?

d) ¿En qué año se produjeron los menores gastos en publicidad? ¿A cuánto ascendieron?

e) Con el paso de los años, ¿cuál tiende a ser el gasto publicitario anual de esta empresa?

10. La relación entre los beneficios obtenidos por la venta de un determinado producto y el tiempo en años que está en el mercado viene dada por la función $B(t) = \dfrac{600t}{t^2 + 100}$, medida en miles de euros.

a) Estudia los períodos en los que los beneficios crecen y en los que decrecen.

b) Indica a cuánto ascienden los beneficios máximos anuales.

c) ¿En qué períodos de tiempo los beneficios son menores que 18 000 euros anuales?

d) ¿Hay algún momento en que la venta de este producto ocasione pérdidas?

SOLUCIONES

1. $D(x) = \det(A) = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow$ los extremos de la función $D(x)$ están en $D'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 1$, que es un mínimo pues $D''(1) > 0$.

2. $\left.\begin{array}{l} a + h = 12 \\ a^2 + x^2 = h^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 6 - \dfrac{x^2}{24} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(x) = \dfrac{x}{2}\left(6 - \dfrac{x^2}{24}\right) = 3x - \dfrac{x^3}{48}$

$S'(x) = 3 - \dfrac{x^2}{16} = 0 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{3}$, puesto que $S''(4\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$ es un máximo.

La hipotenusa mide 8 cm, y los catetos 4 y $4\sqrt{3}$ cm respectivamente.

3. La diagonal del rectángulo es 4 cm, por tanto,

$S(x) = x\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow S'(x) = \dfrac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$;

$S'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$ posibles extremos; como $S''(2\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}$ es un máximo.El rectángulo de mayor área es el cuadrado de $2\sqrt{2}$ cm de lado.

4. $\left.\begin{array}{l} a = 2h \\ l + a + h = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(l) = l \cdot a \cdot h = l \cdot 2h^2 = 2l\left(8 - \dfrac{l}{3}\right)^2$;

$V'(l) = 128 - \dfrac{64l}{3} + \dfrac{2l^2}{3}$; $V'(l) = 0 \Rightarrow l = 24$, $l = 8$ posibles extremos; como $V''(12) < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow l = 8$ es un máximo. Las medidas de la piscina son 5,33, 8 y 10,66 m respectivamente.

5. La generatriz del cono resultante mide 10 cm, su volumen, en función del radio de la base, es

$V(r) = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi r^2\sqrt{100 - r^2}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V'(r) = \dfrac{\pi(200r - r^3)}{3\sqrt{100 - r^2}}$; $V'(r) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 0,\ r = \pm\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ posibles extremos, puesto que $V''\left(\dfrac{10\sqrt{6}}{3}\right) < 0 \Rightarrow \dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ es un máximo

Puesto que la longitud de la circunferencia que forma la base del cono es el arco que ha quedado después del corte. Para calcular el arco del sector circular:

$2\pi 10 - 2\pi\dfrac{10\sqrt{6}}{3} = 11{,}53$

Es decir, n.º grados $= \dfrac{360 \cdot 11{,}53}{2\pi 10} \approx 66$ grados.

6. $x + y = 45$, la función a maximizar es $P(x) = x^3(45 - x)^2 = x^5 - 90x^4 + 2\,025x^3$, tiene un máximo en $x = 27$; los números son $x = 27$, $y = 18$.

7. $f'(x) = -\dfrac{9x^2}{500} + \dfrac{63x}{10} - 270$, el máximo es $x = 300$, el importe de la póliza es:

$f(300) = 100\,500$ euros

8.
a) $f'(t) = 0{,}018t^2 - 0{,}22t + 0{,}57$, tiene un máximo en $t = 3{,}74$ y un mínimo en $t = 8{,}49$, por tanto, en el período (0; 3,74) la cotización aumenta, en (3,74; 8,49) decrece y en (8,49; 12) vuelve a crecer.

b) Los extremos absolutos de f están en los extremos, por tanto, la máxima cotización fue en diciembre, $f(12) = 3{,}17$ euros, y la mínima al comenzar el año, $f(0) = 1{,}80$ euros.

9.
a) $f(0) = 120\,200 - 6\,010e^2 \approx 75\,791{,}77$ euros.

b) f es siempre continua y tal que

$f'(x) = \dfrac{6\,010x^2 - 36\,060x + 30\,050}{e^{x-2}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 5$ posibles extremos. Como $f''(1) < 0$ y $f''(5) > 0 \Rightarrow$ en (0, 1) los gastos aumentaron, en (1, 5) decrecieron y después volvieron a crecer siempre.

c) En $x = 1$, f tiene un máximo, $f(1) = 152\,873{,}75$ euros.

d) En $x = 5$, f tiene un mínimo, $f(5) = 118\,404{,}68$ euros.

e) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 120\,200 \Rightarrow$ El gasto en publicidad tiende a ser 120 200 euros.

10.
a) $B'(t) = \dfrac{600(100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$. Los extremos de esta función son $t = -10$ y $t = 10$; como $t = -10$ queda fuera de su dominio, que es $(0, \infty)$, estudiamos solo $t = 10$, donde tiene un máximo. Por tanto, B crece en (0, 10) y decrece en $(10, \infty)$.

b) El máximo de B es $t = 10$, por tanto, $B(10) = 30\,000$ euros.

c) $B(t) < 18 \Rightarrow t > 30$ años.

d) No, pues $B(t) > 0$ para cualquier $t > 0$. Es decir, siempre da beneficios, aunque, puesto que $\lim\limits_{t \to \infty} B(t) = 0$, con el paso de los años los beneficios tienden a anularse.