17 Intervalos de confianza

1. Se ha tomado, al azar, una muestra de 15 pymes (pequeñas y medianas empresas) y se les ha preguntado por el número de trabajadores. Los resultados han sido: 8, 5, 2, 6, 14, 4, 5, 9, 20, 7, 10, 12, 14, 6, 3.

a) Calcula la media aritmética y la varianza muestrales.

b) Calcula la cuasivarianza muestral.

c) ¿Qué relación existe entre la varianza y la cuasivarianza muestrales?

2. Utiliza las tablas de la distribución normal tipificada y halla los valores críticos tales que el área rayada tome los valores:

a) Área rayada = 0,8624.

b) Área rayada = 0,98.

c) Área rayada = 0,75.

3. La media de los pesos de 500 estudiantes de un determinado centro es 68 kg y la desviación típica 6 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, halla:

a) El número de estudiantes que pesan entre 65 y 71 kg.

b) El número de estudiantes que pesan menos de 60 kg.

4. La media de los diámetros interiores de tubos de acero es 12,75 cm, con una desviación típica de 0,75 cm. El propósito para el que se destinan estos tubos permite una tolerancia máxima en el diámetro entre 11,75 y 13,75 cm, suponiendo que los diámetros se distribuyen normalmente.

a) Determina el porcentaje de tubos defectuosos.

b) ¿Qué intervalo centrado en 12,75 contiene al 50 % de la población de tubos?

c) Si la producción es de 5 000 unidades, ¿cuántos se espera que tengan un diámetro superior a 14 cm?

5. Una muestra de 100 votantes elegidos al azar, entre todos los de un distrito determinado, indicó que el 55 % de ellos estaba a favor de un determinado candidato *A*. Halla un intervalo de confianza para el parámetro «proporción de votantes favorables al candidato *A*» al nivel del:

a) 95 %

b) 99,73 %

6. A dos grupos de enfermos *A* y *B*, formados por 50 y 100 individuos, respectivamente, se les ha suministrado, al primero, un somnífero nuevo, y al segundo, uno convencional. Para los pacientes del grupo *A*, el número medio de horas de sueño ha sido 7,82 horas, con una desviación típica igual a 0,24 horas. Para los del grupo *B*: 6,75 horas y 0,30 horas. Calcula el intervalo de confianza para la diferencia del número medio de horas de sueño inducidas por los dos somníferos para un nivel del:

a) 95 %

b) 99 %

SOLUCIONES

1. a) Media aritmética muestral: $\bar{x} = 8{,}33$

Varianza muestral:

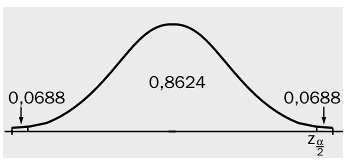
$$s^2 = \frac{\sum (x_i - 8{,}33)^2}{15} = 22{,}62$$

b) Cuasivarianza muestral:

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum (x_i - 8{,}33)^2}{15 - 1} = 24{,}24$$

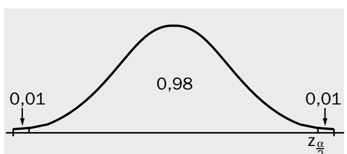
c) $\dfrac{n\ s^2}{n-1} = \hat{s}^2$; en efecto: $\dfrac{15 \cdot 22{,}62}{14} = 24{,}24$

2. a)



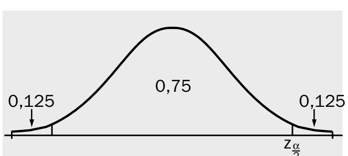
$p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}8624 + 0{,}0688;\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}49$

b)



$p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}98 + 0{,}01 = 0{,}99;\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$

c)



$p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}75 + 0{,}125 = 0{,}875;\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}15$

3. La variable peso, X, se distribuye según una $N(68, 6)$.

a) $p(65 < X \leqslant 71) = p\left(\dfrac{65-68}{6} < Z \leqslant \dfrac{71-68}{6}\right) =$

$= p(-0{,}5 < Z \leqslant 0{,}5) = 2 \cdot [p(Z \leqslant 0{,}5) - 0{,}5] =$
$= 2 \cdot [0{,}6915 - 0{,}5] = 0{,}383.$

El número de estudiantes con el peso entre 65 y 71 kg es: $500 \cdot 0{,}3830 = 191{,}5 \approx 191$ ó 192.

b) $p(X < 60) = p\left(Z < \dfrac{60-68}{6}\right) = p(Z < -1{,}33) =$

$= 1 - p(Z \leqslant 1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

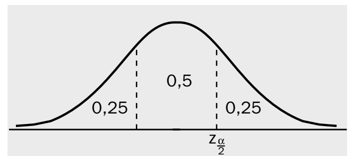
El número de estudiantes con el peso menor de 60 kg es: $500 \cdot 0{,}0918 = 45{,}9 \approx 46$.

4. a) p(defectuoso) = la suma de las áreas a la izquierda de $\dfrac{11{,}75-12{,}75}{0{,}75}$ y a la derecha de $\dfrac{13{,}75-12{,}75}{0{,}75}$, es decir:

$1 - p(-1{,}33 < Z \leqslant 1{,}33) = 1 - 0{,}8164 =$
$= 0{,}1836.$

Porcentaje de tubos defectuosos: 18,36 %.

b)



$P(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75;\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 0{,}675.$

Intervalo: $(12{,}75 - 0{,}675,\ 12{,}75 + 0{,}675) =$
$= (12{,}075,\ 13{,}425)$

c) Si la producción es de 5 000 unidades, el número de tubos con diámetro superior a 14 cm es igual a:

$5\,000 \cdot p\left(Z > \dfrac{14-12{,}75}{0{,}75}\right) =$

$= 5\,000 \cdot [1 - p(Z \leqslant 1{,}67)] = 237{,}5 \approx 237$ ó 238 tubos.

5. $n = 100;\ \hat{p} = 0{,}55 \longrightarrow \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}0497$

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow p\left(Z \leqslant Z_{\frac{0{,}05}{2}}\right) =$

$= 0{,}95 + \dfrac{0{,}05}{2} = 0{,}975 \Rightarrow Z_{\frac{0{,}05}{2}} = 1{,}96$

$IC: \left(\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right) =$

$= (0{,}55 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}0497) = (0{,}453;\ 0{,}647)$

b) $1 - \alpha = 0{,}9973 \Rightarrow p\left(Z \leqslant Z_{\frac{0{,}0027}{2}}\right) =$

$= 0{,}9973 + \dfrac{0{,}0027}{2} = 0{,}99865 \Rightarrow Z_{\frac{0{,}0027}{2}} = 3$

$IC: \left(\hat{p} \pm Z_{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right) =$

$= (0{,}55 \pm 3 \cdot 0{,}0497 = (0{,}4009;\ 0{,}6991)$

6. El intervalo de confianza para la diferencia de medias:

$$IC = \left(\bar{x}_A - \bar{x}_B \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right)$$

a) Para un nivel del 95 %, $z_{\frac{0{,}05}{2}} = 1{,}96.$

$$IC = \left(7{,}82 - 6{,}75 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}24^2}{50} + \frac{0{,}30^2}{100}}\right)$$

$$= \left(1{,}07 \pm 1{,}96 \cdot \frac{0{,}45299}{10}\right) = (0{,}981;\ 1{,}159)$$

b) Para un nivel del 99 %, $z_{\frac{0{,}01}{2}} = 2{,}58$

$$IC: \left(1{,}07 \pm 2{,}58 \cdot \frac{0{,}4529}{10}\right) = (0{,}953;\ 1{,}187).$$