18 Contraste de hipótesis

1. Formula la hipótesis nula y una hipótesis alternativa en los siguientes casos:

a) Decidir si una moneda está cargada.

b) El fabricante de un medicamento dice que el mismo tiene un 90 % de efectividad en el alivio de una dolencia.

c) Se sabe que los cables producidos por una determinada empresa tienen una resistencia media a la rotura de 1 800 kg y una desviación típica de 100 kg. Mediante una nueva técnica en el proceso de fabricación se aspira a que esta resistencia media pueda ser incrementada.

2. Determina los valores críticos a los niveles de significación del 0,5 %; 0,2 %; 1 %; y 5 %, si la distribución es $N(0, 1)$, para contrastes bilaterales y unilaterales.

3. La probabilidad de obtener entre 80 y 120 caras inclusive, en 200 lanzamientos de una moneda es 0,9962.

Para ensayar la hipótesis de que la moneda está bien construida, se toma la siguiente regla de decisión: se acepta la hipótesis si el número de caras, en una serie de 200 lanzamientos, se encuentra entre 80 y 120, ambos inclusive; de otro modo, se rechaza.

a) Halla la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando en realidad es cierta.

b) Interpretación gráfica.

c) ¿Qué conclusión sacarías si en la muestra de 200 lanzamientos se obtuvieran 120 caras?

4. Una urna contiene bolas negras y blancas. Para contrastar la hipótesis «proporciones iguales de bolas blancas y negras», se toma una muestra mediante la extracción de 100 bolas con reemplazamiento, anotando los colores de las bolas extraídas, y se adopta la regla de decisión: se acepta la hipótesis si se obtienen entre 45 y 55 bolas negras, ambos valores incluidos; se rechaza en caso contrario.

a) Halla la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando en realidad es correcta.

b) Interpretación gráfica de la regla de decisión.

5. Un laboratorio expide un preparado farmaceútico envasado. El departamento de control afirma que los pesos de los envases se distribuyen normalmente con media 20 g y desviación típica 3 g.

Para contrastar esta afirmación se toma una muestra aleatoria de 25 envases y observamos que el peso medio es de 19,5 g. ¿Qué se puede decir al respecto si el nivel de significación ha de ser del 5 %?

6. El porcentaje de notas iguales o superiores a 8 puntos en un curso de matemáticas aplicadas de una universidad durante la última década ha sido del 10 %. En el último año hubo 40 de estas notas en un grupo de 300 estudiantes. Contrasta la significación de este resultado al nivel 0,1.

SOLUCIONES

1. a) $H_0 : p = 0{,}5$; donde p es la probabilidad de cara.
$H_1 : p \neq 0{,}5$, o bien, $H_1 : p > 0{,}5$; $H_1 : p < 0{,}5$

b) $H_0 : p = 0{,}9$
$H_1 : p < 0{,}9$ (p es la probabilidad de alivio).

c) $H_0 : \mu = 1\,800$ kg (no cambia la resistencia).
$H_1 : \mu > 1\,800$ kg (hay cambio en la resistencia).

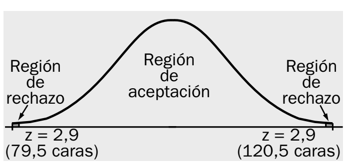
2.

Nivel de significación	Valores críticos Contraste bilateral	Valores críticos Contraste unilateral
5 % = 0,05	$\pm 1{,}96$	$\pm 1{,}645$
1 % = 0,01	$\pm 2{,}58$	$\pm 2{,}33$
0,5 % = 0,005	$\pm 2{,}81$	$\pm 2{,}58$
0,2 % = 0,002	$\pm 3{,}08$	$\pm 2{,}88$

3. $p(80 \leqslant \text{n.º de caras} \leqslant 120) = 0{,}9962$

a) $1 - 0{,}9962 = 0{,}0038$ es la probabilidad de obtener menos de 80 o más de 120 caras, si la moneda está bien construida, por lo que la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando es correcta es 0,0038.

b)



Si en 200 lanzamientos se obtienen valores tales que la normal tipificada $Z \in (-2{,}9,\ 2{,}9)$, se acepta la hipótesis; en caso contrario, se rechaza y se decide que la moneda está mal construida.

c) $H_0 : p = 0{,}5 = p_0$ (p probabilidad de cara, moneda bien construida); $H_1 : p \neq 0{,}5$

La proporción $\hat{p}$ sigue una distribución

$$N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}\right) : N\left(0{,}5, \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{200}}\right) =$$

$= N(0{,}5,\ 0{,}035)$

O bien, la variable «número de caras»:

$$N\left(100, \sqrt{\frac{100 \cdot 100}{200}}\right) = N(100,\ 5\sqrt{2})$$

número de caras es 120 $\Rightarrow \dfrac{120 - 100}{5\sqrt{2}} = 2{,}82$,

que está dentro de la región de aceptación.

4. La variable aleatoria discreta X: número de bolas negras, sigue una $B(100,\ 0{,}5)$ que aproximamos por la normal, con lo que X' sigue una $N(50,\ 5)$.

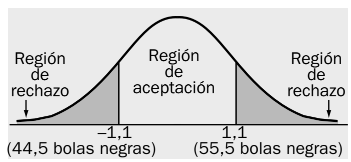
$p(45 < X \leqslant 55) = p(44{,}5 < X' \leqslant 55{,}5) =$

$$= p\left(\frac{44{,}5 - 50}{5} < Z \leqslant \frac{55{,}5 - 50}{5}\right) =$$

$= p(-1{,}1 < Z \leqslant 1{,}1) = 2p[(Z \leqslant 1{,}1) - 0{,}5] =$
$= 2 \cdot 0{,}3643 = 0{,}7286$.

a) La probabilidad de rechazar la hipótesis «proporciones iguales», cuando sea correcta, es:
$1 - 0{,}7286 = 0{,}2714$.

b)



Nivel de significación: $\alpha = 0{,}2714$.

5. $H_0 : \mu = 20\text{ g} = \mu_0$; $H_1 : \mu \neq 20$ g

Contraste bilateral, ya que $\mu > 20$, o bien, $\mu < 20$.

- Estadístico del contraste: la media muestral

$$\overline{X}: \longrightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right): N(20;\ 0{,}6);$$

$$Z = \frac{\overline{x} - 20}{0{,}6} \longrightarrow N(0,\ 1)$$

- Nivel de significación $\alpha = 0{,}05$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$-1{,}96 = \frac{\overline{x} - 20}{0{,}6} \Rightarrow \overline{x} = 20 - 1{,}96 \cdot \frac{3}{5} = 18{,}824$$

$$1{,}96 = \frac{\overline{x} + 20}{0{,}6} \Rightarrow \overline{x} = 20 + 1{,}96 \cdot \frac{3}{5} = 21{,}176$$

Como $19{,}5 \in (18{,}824;\ 21{,}176)$, se acepta la hipótesis nula, al nivel de significación del 5 %.

6. Formulación de las hipótesis:

$H_0 : p = 0{,}1 = p_0$
$H_1 : p \neq 0{,}1$ es un contraste bilateral.

La proporción $\hat{p}$ sigue una distribución:

$$N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}\right): N(0{,}1;\ 0{,}017)$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}} = \frac{\hat{p} - 0{,}1}{0{,}017} \longrightarrow N(0,\ 1)$$

Para $\alpha = 0{,}1$ la región de aceptación es:
$(-1{,}645;\ 1{,}645)$

$$z = \frac{0{,}133 - 0{,}1}{0{,}017} = 1{,}94 \notin (-1{,}645;\ 1{,}645)$$

Se rechaza H_0 y hemos de aceptar que el porcentaje de notas iguales o superiores a 8 no es del 10 %.