7 Funciones derivables

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 1 - x^2$ en el punto (1, 0).

2. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$.

3. Halla los puntos en los que la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ en el punto de abscisa $x = 2$ corta a los ejes coordenados.

4. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a esta curva en el punto (1, 1) sea paralela a la recta $4x - y + 7 = 0$.

5. ¿Existe algún punto en el que la curva $f(x) = e^{x-1}$ tenga una recta tangente paralela al eje OX? Razónalo.

6. Razona por qué la curva $f(x) = |x - 3|$ no tiene recta tangente en $x = 3$.

7. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y escribe su función derivada.

8. Determina m y n para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + n & \text{si } x < 1 \\ mx + 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

9. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ y escribe su función derivada.

10. Estudia el dominio de definición, la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -3x & \text{si } -1 < x \leqslant 0 \\ 3x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. $f'(x) = -2x$; la recta tangente en (1, 0) tiene de ecuación:

$y - 0 = f'(1)\,(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$

2. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; la recta tangente cuando $x = 4$ es:

$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow x - 4y + 4 = 0$

3. $y' = \dfrac{2}{(1 - x)^2}$; la recta tangente, cuando $x = 2$, es

$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow 2x - y - 7 = 0$; por tanto, el punto de corte de esta recta con el eje OX es $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$ y con el eje OY es $(0, -7)$.

4. Si (1, 1) pertenece a la curva: $1 = a + b$; además, la pendiente de la recta es 4.

Como $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 2a + b = 4$; por tanto, $a = 3$, $b = -2$.

5. No, puesto que $f'(x) = e^{x-1}$ no se anula para ningún número real ($e^{x-1} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

6. No puede tener recta tangente en $x = 3$, porque la función no es derivable en este punto.

7. f no tiene problemas de continuidad, pues en cada trozo f es continua y, además: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -1$.

En relación con la derivabilidad, f es derivable en cada trozo, pero no es derivable en $x = 0$, puesto que $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 0$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$

8. Los problemas de continuidad y derivabilidad de la función están, si existen, en $x = 1$, puesto que el enunciado dice que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$; se tiene que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 + n = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = m + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow m - n = -1.$

$f'(1^-) = 2 = f'(1^+) = m$; por tanto, $m = 2$, $n = 3$.

9. f es siempre continua, puesto que en cada trozo es continua por ser polinómica y exponencial, y además el posible problema en $x = 0$ no existe, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

Respecto a la derivabilidad, también es derivable en cada trozo pero no es derivable en 0, puesto que $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = 1$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ e^x & \text{si } x>0 \end{cases}$

10. $Df = \mathbb{R}$

f es continua en cada intervalo de definición, pues está formada por funciones polinómicas, ahora, en $x = -1$, f tiene una discontinuidad inevitable con un salto finito de 2 unidades, ya que:

$\lim\limits_{x\to -1^-} (-x^3) = 1 \neq 3 = \lim\limits_{x\to -1^+} (-3x)$

En $x = 0$, f es continua, ya que:

$\lim\limits_{x\to 0^-} (-3x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x$

En $x = 1$, f tiene una discontinuidad inevitable con un salto finito de 2 unidades, ya que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} (3x) = 3 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} x^3$

En cuanto a la derivabilidad, f es derivable en cada trozo, pero no es derivable en $x = -1$ ni en $x = 1$ por no ser continua en estos puntos, ni tampoco en $x = 0$, ya que:

$f'(0^-) = -3 \neq 3 = f'(0^+)$.