8 Monotonía y curvatura

1. Calcula los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ c) $f(x) = xe^x$ e) $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ d) $f(x) = \mathrm{L}(x^2 + 2x)$ f) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

2. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ e) $f(x) = (x + 1)e^x$

b) $f(x) = x^4 - x^3$ d) $f(x) = \mathrm{L}(x + 2)$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

3. Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$ b) $f(x) = \mathrm{L}(x^2 - 1)$ c) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2}$ d) $f(x) = x^2e^x$

4. Estudia la curvatura de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x - 1)^2$ b) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

5. Considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$. Calcula:

a) Su dominio.

b) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Sus máximos y sus mínimos.

d) Sus puntos de inflexión.

e) La ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

6. Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^3 + ax + 1$ tenga un extremo en $x = 1$. Halla dicho extremo y determina si es máximo o mínimo.

7. Considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$. Se sabe que tiene dos extremos en $x = 1$ y en $x = \dfrac{1}{3}$, respectivamente.

a) Halla el valor de a y b.

b) Clasifica el tipo de extremos que tiene en $x = 1$ y en $x = \dfrac{1}{3}$.

c) Halla los puntos de la curva donde la pendiente de la recta tangente es 5.

8. Considera la función $f(x) = ax^3 + bx$. Sabiendo que tiene un extremo en $(1, -4)$, halla el valor de a y b.

9. Encuentra dos números sabiendo que su producto es máximo y que la suma del primero con el cuadrado del segundo es 48.

SOLUCIONES

1. a) $f'(x) = \dfrac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow$ Máximo en $x = 2$, mínimo en $x = -2$.

b) $f'(x) = \dfrac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} \Rightarrow$ Máximo en $x = 0$, mínimo en $x = 2$.

c) $f'(x) = (x + 1)e^x \Rightarrow$ Mínimo en $x = -1$.

d) $f'(x) = \dfrac{2(x + 1)}{x^2 + 2x} \Rightarrow$ No tiene extremos, pues el punto que anula la primera derivada ($x = -1$) no pertenece al dominio de f.

e) $f'(x) = -\dfrac{2}{(1 + x)^2} \Rightarrow$ No tiene extremos, pues nunca se anula la primera derivada.

f) $f'(x) = \dfrac{e^x(x - 2)}{x^3} \Rightarrow$ Mínimo en $x = 2$.

2. a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x + 1)(x - 1) \Rightarrow f$ decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$; crece en $(-1, 0)$ y en $(1, \infty)$.

b) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3) \Rightarrow f$ decrece en $\left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$.

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x - 1)^2} < 0 \Rightarrow f$ decrece en todo su dominio, $Df = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x + 2} \Rightarrow f$ crece en todo su dominio $Df = (-2, \infty)$.

e) $f'(x) = e^x(x + 2) \Rightarrow f$ decrece en $(-\infty, -2)$ y crece en $(-2, \infty)$.

f) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow f$ crece en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$; decrece en $(0, 2)$ y en $(2, \infty)$.

3. a) $f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow x = 2$ es un punto de inflexión, pues $f'''(2) \neq 0$.

b) $f''(x) = -\dfrac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f$ no tiene puntos de inflexión, pues nunca se anula $f''(x)$.

c) $f''(x) = \dfrac{2(x - 6)}{x^4} \Rightarrow x = 6$ es un punto de inflexión, pues $f'''(6) \neq 0$.

d) $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2) \Rightarrow x = \sqrt{2} - 2$, $x = -\sqrt{2} - 2$ son puntos de inflexión, pues en ellos $f'''(x) \neq 0$.

4. a) $f''(x) = 2 \Rightarrow f$ es convexa en todo $\mathbb{R}$.

b) $f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f$ es cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$ y convexa en $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$.

c) $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{(x - 1)^3}} < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en todo su dominio $(1, \infty)$.

d) $f''(x) = \dfrac{4}{(x - 1)^3} \Rightarrow f$ es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$.

5. a) $Df = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} < 0 \Rightarrow f$ decrece en todo su dominio.

c) No tiene, pues $f'(x) \neq 0$ siempre.

d) $f''(x) = \dfrac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} \Rightarrow x = 0$ es un punto de inflexión, pues $f'''(0) \neq 0$.

e) $y = -\dfrac{x}{4}$

6. $f'(x) = 3x^2 + a$, puesto que $x = 1$ es extremo $\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a = -3$

Al ser $f''(x) = 6x \Rightarrow f$ tiene un mínimo en $(1, -1)$.

7. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

a) $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$; $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1}{3} + \dfrac{2a}{3} + b = 0 \Rightarrow a = -2, b = 1$

b) $f''(1) > 0$ y $f''\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ tiene un mínimo y en $x = \dfrac{1}{3}$ tiene un máximo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2, x = -\dfrac{2}{3}$

8. $f'(x) = 3ax^2 + b$, si $x = 1$ es un extremo $\Rightarrow$
$\Rightarrow 3a + b = 0$

Puesto que $(1, -4)$ pertenece a la curva $\Rightarrow$
$\Rightarrow a + b = -4 \Rightarrow a = 2, b = -6$

9. Si los números son x e y, se verifica que $y + x^2 = 48$; entonces, la función producto es:

$P(x) = x(48 - x^2) \Rightarrow P'(x) = 48 - 3x^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pm 4$. Puesto que $y = 48 - x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 32$ y $x = 4$