

9 Representación de funciones

1. Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$. Determina:

- Su dominio.
- Sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- El signo de la función en cada región.
- Sus extremos.
- Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Sus puntos de inflexión.
- Su curvatura.
- Dibuja su gráfica.

2. Halla los puntos de corte con los ejes coordenados y las regiones de signo de la función $f(x) = e^x(x^2 - 4)$.

3. Halla, cuando existan, las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

4. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Estudia su continuidad y su derivabilidad.
- Represéntala gráficamente.

5. Considera la función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$:

- Represéntala gráficamente.
- Razona en qué puntos no es derivable.
- Estudia sus extremos.
- Estudia sus intervalos de monotonía.

6. Representa la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

7. A partir de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, dibuja las gráficas de:

a) $g(x) = \frac{4}{x}$

b) $h(x) = \frac{1}{x} + 3$

c) $i(x) = \frac{1}{x-2}$

SOLUCIONES

1. $f(x) = x(x^2 - 3x - 9)$

a) $Df = (-\infty, \infty)$

b) Eje OX : $(0, 0)$, $(\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}, 0)$, $(\frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}, 0)$;
eje OY : $(0, 0)$

c) Negativa en $(-\infty, \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2})$ y en $(0, \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2})$;
Positiva en $(\frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}, 0)$ y en $(\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}, \infty)$.

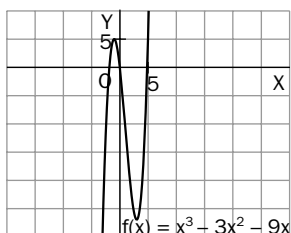
d) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ tiene un máximo en $(-1, 5)$ y un mínimo en $(3, -27)$.

e) Crece en $(-\infty, -1)$ y en $(3, \infty)$; decrece en $(-1, 3)$.

f) $f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $(1, -11)$.

g) Es cóncava en $(-\infty, 1)$ y es convexa en $(1, \infty)$.

h)



2. Puesto que $f(0) = -4$, corta al eje OY en $(0, -4)$.

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, corta al eje OX en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Puesto que $e^x > 0$, $x \in \mathbb{R}$, f tendrá el signo que tenga el polinomio; es decir, es positiva en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$, y es negativa en $(-2, 2)$.

3. a) Si $x \rightarrow 1$, $f(x) \rightarrow \pm\infty \Rightarrow x = 1$ es una asíntota vertical por abajo y por arriba. Si $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow y = 0$ (eje OX) es asíntota horizontal por la izquierda y por la derecha.

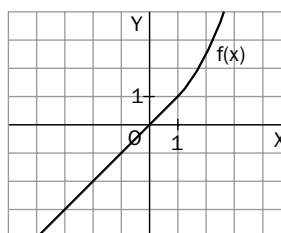
b) Es siempre continua, por lo que no tiene asíntotas verticales. Si $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow f$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ (eje OX) por la izquierda y por la derecha.

c) Si $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ (eje OY) por abajo y por arriba.

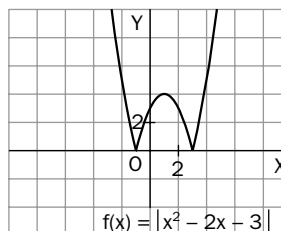
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0 \Rightarrow f$ tiene una asíntota oblicua en $y = x$.

4. a) Es continua y derivable en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ por ser polinómica en ambos. En $x = 1$ es continua, pues $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$; y es derivable, pues $f'(1^-) = f'(1^+) = 1$.

b)



5. a)

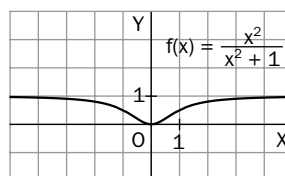


b) En $x = -1$, $x = 3$, porque, en ambos: $f'(x^-) \neq f'(x^+)$.

c) Tiene un máximo relativo en $(1, 4)$ y dos mínimos absolutos en $(-1, 0)$ y en $(3, 0)$.

d) Decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(1, 3)$; crece en $(-1, 1)$ y en $(3, \infty)$.

6.



7.

