

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
JUNIO 2009
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
EXAMEN MODELO

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente el parámetro real k:

$$\begin{cases} x + y + kz = 4 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro k.
- b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
- c) Resuélvase el sistema para k = 0.

Solución.

a. El sistema está definido por las matrices de coeficientes (C) y ampliada (A).

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entre estas matrices se dan las siguientes relaciones:

$$C \subset A \Rightarrow \text{rg } C \leq \text{rg } A \leq 3 = n \text{ (número de incógnitas)}$$

Si el $|C| \neq 0$, $\text{rg } C = \text{rg } A = n = 3$, siendo en ese caso el sistema compatible determinado, por tanto se discute el tipo de solución del sistema para los valores del parámetro k que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(-2+6k) - (k-2+6) = 5k - 5 = 5(k-1)$$

$$\det C = 0 : 5(k-1) = 0 : k = 1$$

Discusión. (Rouché)

i. Si $k \neq 1$. $|C| \neq 0$, $\text{rg } C = \text{rg } A = n = 3$. Sistema compatible determinado. Sistema de Cramer.

ii. Si $k = 1$. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} : |C| = 0 \Rightarrow \text{rg } C < 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 : \text{rg } C = 2$. Para estudiar el

rango de la ampliada, se tiene en cuenta que $\text{rg } A \geq \text{rg } C = 2$. Si se parte del menor de orden dos de la matriz de coeficientes, sus menores orlados son la matriz de coeficientes, cuyo determinante es cero, y el menor formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{rg } A = 2 = \text{rg } C < n = 3. \text{ Sistema compatible indeterminado.}$$

Discusión. (Gauss)

i. Si $k \neq 1$, $|C| \neq 0$, Sistema compatible determinado. Sistema de Cramer.

ii. Si $k = 1$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & 5 \\ -1 & 3 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} E_2 = E_2 - 2E_1 \\ E_3 = E_3 + E_1 \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & -3 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 4 \end{pmatrix} =$$

Se simplifican la 2ª y 3ª ecuación

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} E_3 = E_3 - E_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \text{ Sistema compatible}$$

indeterminado.

b. Para $k = 1$. El sistema equivalente los forman las dos ecuaciones que contienen al menor de orden 2 distinto de cero.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Para resolver el sistema se toma z como constante y se transforma en un parámetro ($z = \lambda$).

$$\begin{cases} x + y = 4 - \lambda \\ 2x - y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

El sistema se puede resolver por cualquier método obteniendo:

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si el sistema se ha discutido por Gauss, este apartado se resolvería con el sistema asociado a la

matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$
, cuyas soluciones son las mismas.

c. Para $k = 0$, el sistema es del tipo Cramer,
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$$
 siendo el determinante de

coeficientes: $\det C = 5(0-1) = -5$

$$x = \frac{|A_x|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = 3; \quad y = \frac{|A_y|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = 1; \quad z = \frac{|A_z|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = 0$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

- a) Determínese los extremos relativos de f .
- b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.
- c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución.

a. En los puntos de extremo relativo (máximos o mínimos locales) la primera derivada es nula y la segunda derivada es distinta de cero, con el siguiente criterio:

$$\text{En } x = a. \quad f'(a) = 0 : f''(a) \neq 0 : \begin{cases} f''(a) < 0 \Rightarrow (a, f(a)) \text{ existe un máximo} \\ f''(a) > 0 \Rightarrow (a, f(a)) \text{ existe un mínimo} \end{cases}$$

Se calculan la primera y segunda derivada.

$$f'(x) = 2(x^2 - 1) \cdot 2x = 4(x^3 - x)$$

$$f''(x) = 4(3x^2 - 1)$$

Se iguala a cero la primera derivada y se calculan los posibles extremos relativos.

$$f'(x) = 0 : 2(x^2 - 1) \cdot 2x = 0 : \begin{cases} 2x = 0 : x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 : x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Se sustituyen las raíces de la primera derivada en la segunda y se sigue el criterio propuesto.

$$f''(-1) = 4(3 \cdot (-1)^2 - 1) = 8 > 0 \Rightarrow (-1, f(-1)) \text{ mínimo}$$

$$f''(0) = 4(3 \cdot (0)^2 - 1) = -4 > 0 \Rightarrow (0, f(0)) \text{ máximo}$$

$$f''(1) = 4(3 \cdot 1^2 - 1) = 8 > 0 \Rightarrow (1, f(1)) \text{ mínimo}$$

Se calculan las imágenes de -1 , 0 y 1 .

$$f(-1) = f(1) = (1^2 - 1)^2 = 0 \quad f(0) = (0^2 - 1)^2 = 1$$

En $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$ la función presenta mínimos relativos a su vez son absolutos, en $(0, 1)$ la función tiene un máximo relativo.

b. La tangente a una función en $x = a$ viene dada por la expresión punto-pendiente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Aplicada a $x = 3$: $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$

$$\text{Donde: } \begin{cases} f(3) = (3^2 - 1)^2 = 64 \\ f'(3) = 4(3^3 - 3) = 96 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta, se obtiene la tangente a la función en $x = 3$.

$$y - 64 = 96(x - 3)$$

$$y = 96x - 224$$

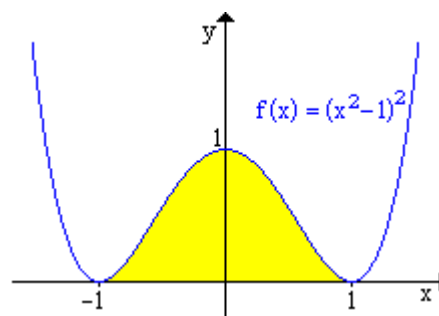
c. Para realizar este apartado es conveniente esbozar la gráfica de la función, de la cual ya se conocen sus extremos relativos. Los cortes con los ejes coinciden con sus extremos relativos, es una función par y los límites en $\pm\infty$ son $+\infty$.

El área pedida es la coloreada en la gráfica, y viene dada por:

$$A = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx = 2 \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx =$$

$$= 2 \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1^2) dx = 2 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^1 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1^5}{5} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} + 1 \right) - 2 \cdot \left(\frac{0^5}{5} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} + 0 \right) = \frac{16}{15} u^2$$



Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A) = \frac{1}{2}; p(B) = \frac{1}{3}; p(C) = \frac{1}{4}; p(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3}; p(A \cap B \cap C) = 0; p\left(\frac{A}{B}\right) = p\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{1}{2}$$

- a) Calcúlese $p(C \cap B)$
- b) Calcúlese $p(\overline{A \cup B \cup C})$. La notación \overline{A} representa el suceso complementario de A.

Solución.

- a. Partiendo de la probabilidad de la unión de tres sucesos se calcula la probabilidad pedida.
 $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$

Teniendo en cuenta:

- $p(A \cap B) = p(B \cap A) = p(B) \cdot p\left(\frac{A}{B}\right)$
- $p(A \cap C) = p(A) \cdot p\left(\frac{C}{A}\right)$
- $p(B \cap C) = p(C \cap B)$
- $p(A \cap B \cap C) = 0$

se despeja $p(C \cap B)$

$$p(C \cap B) = p(A) + p(B) + p(C) - p(B) \cdot p\left(\frac{A}{B}\right) - p(A) \cdot p\left(\frac{C}{A}\right) - p(A \cup B \cup C)$$

$$p(C \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 0$$

- b. Aplicando las leyes de Morgan:

$$p(\overline{A \cup B \cup C}) = p(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - p(A \cap B \cap C) = 1 - 0 = 1$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.

- a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%? Razónese la respuesta
- b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?

Solución.

- a. Las medias de las muestras de la variable x de tamaño $n = 81$ también siguen una distribución normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. La cuestión que plantea se puede resolver de varias formas:

- i. Comprobando si $p(|\bar{x} - \mu| < 10) \geq 0,95$; $N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{55}{\sqrt{81}}\right)$

$$|\bar{x} - \mu| < 10 : \pm(\bar{x} - \mu) < 10 \left\{ \begin{array}{l} +(\bar{x} - \mu) < 10 : \bar{x} < \mu + 10 \\ -(\bar{x} - \mu) < 10 : -\bar{x} + \mu < 10 : -\bar{x} < -\mu + 10 : \bar{x} < \mu - 10 \end{array} \right\} : \mu - 10 < \bar{x} < \mu + 10$$

$$p(\mu - 10 < \bar{x} < \mu + 10) = N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{55}{9}\right) \left\{ \begin{array}{l} \mu - 10 : z = \frac{\mu - 10 - \mu}{\frac{55}{9}} = \frac{-10}{\frac{55}{9}} = -1,64 \\ \mu + 10 : z = \frac{\mu + 10 - \mu}{\frac{55}{9}} = \frac{10}{\frac{55}{9}} = 1,64 \end{array} \right\} = p(-1,64 < z < 1,64) =$$

$$= p(z < 1,64) - p(z \leq -1,64) = p(z < 1,64) - (1 - p(z < 1,64)) = 2p(z < 1,64) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0,9495 - 1 = 0,899 < 0,95$$

No se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%.

- ii. Comprobando si el error máximo es menor o igual a 10. El error máximo ($\epsilon_{\max} = 10$) para la estimación de la media poblacional mediante un intervalo a partir de una muestra viene expresado por:

$$\epsilon_{\max} \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donde $Z_{\alpha/2}$ se calcula a partir del nivel de confianza ($1 - \alpha$)

$$\left. \begin{array}{l} Z_{\alpha/2} = \Phi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = 0,95 \end{array} \right\} : Z_{\alpha/2} = \Phi\left(1 - \frac{0,05}{2}\right) = \Phi(0,9750) = 1,96$$

$$\epsilon_{\max} = 10 \geq 1,96 \cdot \frac{55}{\sqrt{81}} = 11,98 : \text{No se cumple}$$

- b. Partiendo de la expresión del error máximo admitido se calcula el tamaño muestral.

$$\epsilon_{\max} \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_{\max}} \right)^2$$

$$n \geq \left(1,96 \cdot \frac{55}{10} \right)^2 = 116,2$$

$$n \geq 117 \text{ elementos}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una refinera utiliza dos tipos de petrleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de petrleo de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de petrleo de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar ms de 100 toneladas de cada tipo de petrleo. ¿Cuántas toneladas de petrleo de cada tipo debe comprar la refinera para cubrir sus necesidades a mnimo coste? Determinar dicho coste mnimo.

Solucin.

Datos.

	Gasolina	fuel-oil	Precio (€/Tm)
A	0,1	0,35	350
B	0'05	0'55	400
Mnimos operativos	10	50	

Variables.

x ≡ Número de toneladas que se compran a la refinera A

y ≡ Número de toneladas que se compran a la refinera B

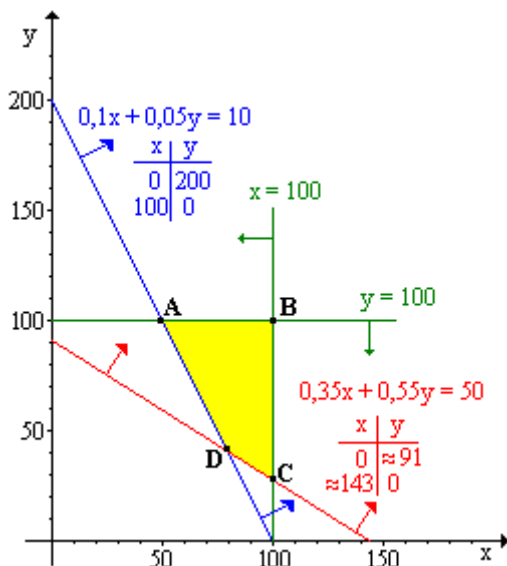
Funcin objetivo.

$$F(x, y) = 350x + 400y$$

Restricciones.

- $0,1x + 0,05y \geq 10$
- $0,35x + 0,55y \geq 50$
- $0 \leq x \leq 100$
- $0 \leq y \leq 100$

Regin factible y vrtices.



$$A : \begin{cases} 0,1x + 0,05y = 10 \\ y = 100 \end{cases} : A = (50, 100)$$

$$B : \begin{cases} x = 100 \\ y = 100 \end{cases} : B = (100, 100)$$

$$C : \begin{cases} x = 100 \\ 0,35x + 0,55y = 50 \end{cases} : C = (100, 27,3)$$

$$D : \begin{cases} 0,1x + 0,05y = 10 \\ 0,35x + 0,55y = 50 \end{cases} : D = (80, 40)$$

Optimacin.

	x	y	F(x, y)
A	50	100	57500
B	100	100	75000
C	100	27,3	45920
D	80	40	44000

Se obtiene un precio mnimo de 44000 € comprando 80 Tm a la refinera A y 40 Tm a la refinera B.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-a}$$

- a) Determinéense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.
- b) Para a = -1, calcúlese los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_0^b f(x) \cdot dx = 0$

Solución.

a. **Asíntotas verticales.** En los puntos excluidos del dominio en los que el límite vale infinito.

$$D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - a \neq 0\}$$

$$x^2 - x - a = 0 : x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

$$1+4a = 0 : a = -\frac{1}{4}$$

Discusión.

- i. Si $a > -\frac{1}{4}$, el denominador tendrá dos soluciones reales, y en ellas la función tendrá asíntotas verticales.
- ii. Si $a = -\frac{1}{4}$, el denominador tendrá una solución real doble, que coincide con un factor del numerador, la función tendrá una única asíntota vertical.

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+\frac{1}{4}} = \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{x-\frac{1}{2}} = \frac{4}{2x-1}$$

- iii. Si $a < -\frac{1}{4}$, el denominador no tiene soluciones reales, la función no tendrá asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = L : L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2-x-a} = 0$ Por que el numerador es de menor grado que el denominador. Para cualquier valor que tome a, la función tiene una asíntota horizontal sobre el eje OX ($y = 0$).

Asíntota horizontal. Por tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

b.
$$\int_0^b \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \text{Ln}|f(x)| + C \\ f(x) = x^2 - x + 1 \\ f'(x) = 2x - 1 \end{array} \right\} = \left(\text{Ln}|x^2 - x + 1| \right)_0^b =$$

$$= \text{Ln}|b^2 - b + 1| - \text{Ln}|0^2 - 0 + 1| = \text{Ln}|b^2 - b + 1| - \text{Ln}|1| = \text{Ln}|b^2 - b + 1| - 0 = 0$$

$$\text{Ln}|b^2 - b + 1| = 0 \Leftrightarrow b^2 - b + 1 = e^0 : b^2 - b + 1 = 1 : b^2 - b = 0 : b \cdot (b-1) = 0 : \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul e igual a 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

- a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.
- b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

Solución.

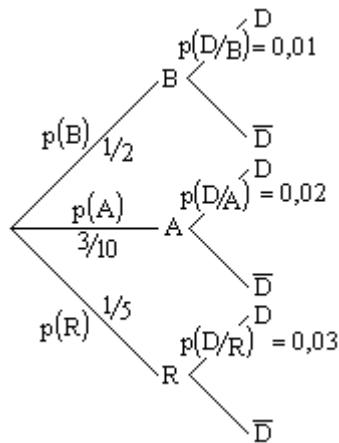
Sucesos:

B ≡ Bombilla blanca; A ≡ Bombilla azul; R ≡ Bombilla roja; D ≡ Bombilla defectuosa.

Datos:

$$p(B) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}; \quad p(A) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}; \quad p(R) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}; \quad p(D/B) = 0,01; \quad p(D/A) = 0,02; \quad p(D/R) = 0,03$$

Diagrama en árbol:



- a. Bombilla defectuosa ≡ Blanca y Defectuosa ó Azul y Defectuosa ó Roja y Defectuosa

$$p(D) = p((B \cap D) \cup (A \cap D) \cup (R \cap D)) = p(B \cap D) + p(A \cap D) + p(R \cap D) =$$

$$= p(B) \cdot p(D/B) + p(A) \cdot p(D/A) + p(R) \cdot p(D/R) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = \frac{17}{1000} \approx 0,017$$

$$p(D) = 1,7\%$$

- b. $p(A/D)_{\text{BAYES}} = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A) \cdot p(D/A)}{p(D)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot 0,02}{\frac{17}{1000}} = \frac{6}{17} \approx 0,3529$
- $$p(A/D) = 35,29\%$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtienen las siguientes cantidades de agua recogidas cada día(en litros):

9,1 ; 4,9 ; 7,3 ; 2,8 ; 5,5 ; 6,0 ; 3,7 ; 8,6 ; 4,5 ; 7,6

- a) Determinése un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95%.
- b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 98%.

Solución.

a. $x \equiv$ Cantidad de agua recogida en un día. Variable continua que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica conocida ($x : N(\mu, \sigma)$).

La media de una muestra de 10 elementos ha sido:

$$\bar{x} = \frac{9.1+4.9+7.3+2.8+5.5+6.0+3.7+8.6+4.5+7.6}{10} = 6 \text{ L}$$

Las medias de la muestras de 10 elementos de esta variable también siguen una distribución Normal.

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$$

El intervalo de probabilidad para la media poblacional a partir de la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Donde $Z_{\alpha/2}$, viene determinado por el nivel de confianza.

Nivel de confianza = $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0,05}{2}\right) = \phi^{-1}(0.9750) = 1.96$$

Sustituyendo en el intervalo de probabilidad:

$$\left(6 - 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}, 6 + 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \right) = (4.76, 7.24)$$

Con una probabilidad del 95% se puede estimar que la media de la cantidad de agua recogida en una estación meteorológica va a estar comprendida entre 4.76 L y 7.24 L.

b. El tamaño muestral se calcula a partir del error máximo admitido.

$$\epsilon_{\text{máx}} \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_{\text{máx}}} \right)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_{\alpha/2} = \phi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = 0.98 \end{array} \right\} : Z_{\alpha/2} = \phi\left(1 - \frac{0.02}{2}\right) = \phi(0.9900) = 2.33$$

$$n \geq \left(2.33 \cdot \frac{2}{1} \right)^2 = 21.7 \Rightarrow n \geq 22 \text{ elementos en la muestra}$$