

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
JUNIO 2010
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
Fase de modalidad

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros. Se estima que el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de españoles, mientras que el importe total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de extranjeros. Los estatutos del club limitan a un máximo de 800.000 euros la inversión total en fichajes extranjeros y exigen que la cantidad total invertida en fichajes de futbolistas españoles sea como mínimo de 500.000 euros. Además, la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros. ¿Qué cantidad debe invertir el club en cada tipo de fichajes para que el importe de las camisetas vendidas sea máximo? Calcúlese dicho importe máximo. Justifíquese.

Solución.

- Definición de las variables.

$x \equiv$ Dinero invertido en fichajes de jugadores españoles

$y \equiv$ Dinero invertido en fichajes de jugadores extranjeros

- Función objetivo: Importe de las camisetas vendidas.

“el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de españoles (x) + el importe total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de extranjeros (y)”

$$F(x, y) = \frac{10}{100}x + \frac{15}{100}y$$

- Restricciones.

i. *“El club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros”*

$$x + y \leq 2\,000\,000$$

ii. *“Los estatutos del club limitan a un máximo de 800.000 euros la inversión total en fichajes extranjeros”*

$$y \leq 800\,000$$

iii. *“Los estatutos exigen que la cantidad total invertida en fichajes de futbolistas españoles sea como mínimo de 500.000 euros”*

$$x \geq 500\,000$$

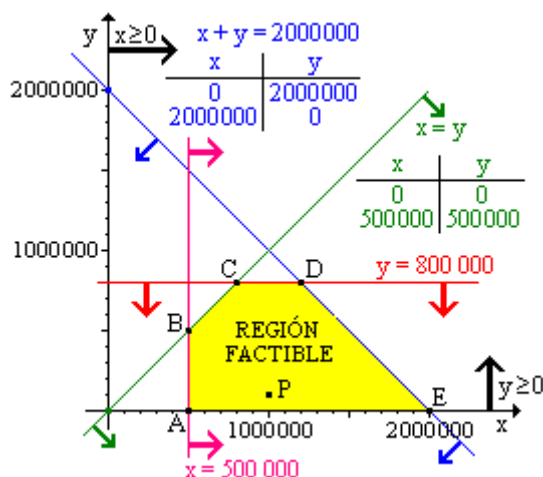
iv. *“La cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros”*

$$x \geq y$$

v. *“Variables no negativas”*

$$x \geq 0; y \geq 0$$

- Región factible



Para determinar la región factible tomo como punto de prueba el punto P (1 000 000, 100 000), comprobando que todas las inecuaciones lo cumplen.

- Vértices.
 - A: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 500\,000 \end{cases} : A = (500\,000, 0)$
 - B: $\begin{cases} x = y \\ x = 500\,000 \end{cases} : B = (500\,000, 500\,000)$
 - C: $\begin{cases} x = y \\ y = 800\,000 \end{cases} : C = (800\,000, 800\,000)$
 - D: $\begin{cases} x + y = 2\,000\,000 \\ y = 800\,000 \end{cases} : D = (1\,200\,000, 800\,000)$

$$E: \begin{cases} x + y = 2\,000\,000 \\ y = 0 \end{cases} : E = (2\,000\,000, 0)$$

- Optimación.

Vértice	x	y	F(x, y)
A	500 000	0	50 000
B	500 000	500 000	125 000
C	800 000	800 000	200 000
D	1 200 000	800 000	240 000
E	2 000 000	0	200 000

El máximo beneficio cumpliendo las restricciones propuesta se obtiene invirtiendo 1 200 000 € en fichajes nacionales y 800 000 € en fichajes extranjeros, obteniendo un beneficio máximo de 240 000 €.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

- Determinense sus asíntotas.
- Calcúlense sus máximos y mínimos locales. Esbócese la gráfica de f.
- Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las recta verticales $x = 2$, $x = 3$, la gráfica de f y la recta de ecuación $y = x + 1$

Solución.

- Verticales:** Puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $\frac{k}{0}$.

$$D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x = 1: \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1^2}{0} = \frac{1}{0} \text{ Asíntota vertical.}$$

Para poder esbozar la gráfica de la función es necesario estudiar la posición de la función respecto de sus asíntotas.

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1^2}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1^2}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Horizontal: $y = L$:

$$L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\pm\infty}{1-0} = \pm\infty$$

La función no tiene asíntotas horizontales

Oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

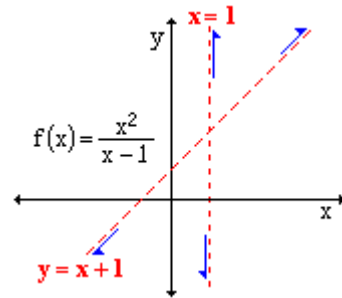
$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x \cdot (x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

Asíntota oblicua: $y = x + 1$

Posición relativa.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - (x+1) \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - (x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\infty-1} = 0^-$ La función se aproxima a la asíntota por debajo.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{+\infty-1} = 0^+$ La función se aproxima a la asíntota por encima.



Otra forma:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 + x \\ \hline x \\ -x + 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \frac{|x-1|}{x+1} \quad y = x + 1$$

Para estudiar la posición relativa sin tener que hacer límites, se puede dar valores a la función y a la oblicua.

x	$y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$	$y_{Ob} = x + 1$	Comparación
-1000	$\frac{(-1000)^2}{-1000-1} = 999,0009\dots$	$-1000 + 1 = 999$	$y_f < y_{Ob}$
1000	$\frac{1000^2}{1000-1} = 1000,001\dots$	$1000 + 1 = 1001$	$y_f > y_{Ob}$

Cuando $x \rightarrow -\infty$, la función se acerca a la asíntota por debajo, cuando $x \rightarrow +\infty$, la función se acerca a la asíntota por encima.

b. Una función tiene extremos relativos en los puntos donde su primera derivada sea cero y su segunda derivada sea distinta de cero, con el siguiente criterio:

Sí $f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$ en $(a, f(a))$ la función tiene un extremo relativo: $\begin{cases} f''(a) < 0 : \text{Máximo} \\ f''(a) > 0 : \text{Mínimo} \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 : \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 : x^2-2x=0 : x \cdot (x-2)=0 : \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 : x=2 \end{cases}$$

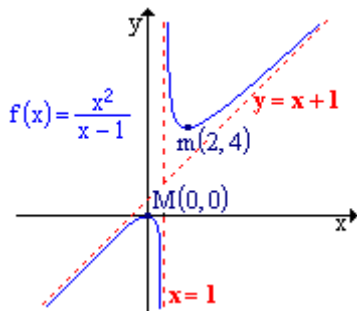
$$f(0)=\frac{0^2}{0-1}=0 : (0,0) ; \quad f(2)=\frac{2^2}{2-1}=4 : (2,4)$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2) \cdot (x-1) - 2 \cdot (x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=-2 < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ la función tiene un máximo.}$$

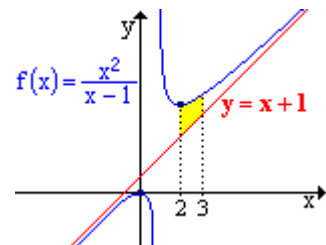
$$f''(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=2 > 0 \Rightarrow (2,4) \text{ la función tiene un mínimo.}$$

c. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores se puede esbozar la gráfica de la función.



- Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$
- Asíntota vertical: $x = 1$.
- Asíntota oblicua: $y = x + 1$
- Punto de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Mínimo local: $(0, 0)$
- Máximo local: $(2, 4)$

d. Aunque no es obligatorio representar las funciones que delimitan el área pedida, si que es recomendable esbozar el área. El área pedida está delimitada por la función, su asíntota oblicua y las rectas verticales $x = 2$ y $x = 3$, que son además los límites de integración. El área que se pide calcular es la representada en la gráfica adjunta.



$$A = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{x-1} - (x+1) \right) dx = \int_2^3 \frac{x^2 - (x+1) \cdot (x-1)}{x-1} dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = (\ln(x-1)) \Big|_2^3 = \ln(3-1) - \ln(2-1) = \ln 2 \text{ u}^2$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $p(A) = 0,5$; $p(B) = 0,4$; $p(A \cap B) = 0,1$. Calcúlese cada una de las siguientes probabilidades:

- a) $p(A \cup B)$ b) $p(\overline{A \cap B})$ c) $p(A/B)$ d) $p(\overline{A} \cap B)$

Solución.

a. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,1 = 0,8$

b. Aplicando la ley de Morgan: $p(\overline{A \cap B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$

c. Aplicando el teorema de Bayes: $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$

d. Suceso "solo B": $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el tiempo de vida útil en miles de horas (Mh) de un cierto modelo de televisor, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 0,5 Mh. Para una muestra aleatoria simple de 4 televisores de dicho modelo, se obtiene una media muestral de 19,84 Mh de vida útil.

- a) Hállese un intervalo de confianza al 95% para el tiempo de vida útil medio de los televisores de dicho modelo.
- b) Calcúlese el tamaño muestra! mínimo necesario para que el valor absoluto del error de la estimación de la media poblacional mediante la media muestral sea inferior a 0,2 Mh con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución.

a. $x \equiv$ Tiempo de vida útil (Mh). Variable continua con distribución Normal.

$$x : N(\mu, \sigma)$$

Si se toman muestras de tamaño n, las medias maestres también siguen una distribución normal cuyos parámetros son:

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El intervalo de confianza para la media de poblacional a partir de la media de una muestra de tamaño n viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x}_0 - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_0 + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

El valor crítico de z se obtiene a partir del nivel de confianza (N.C. = $1 - \alpha$).

$$Z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Para un nivel de confianza del 95 %:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \alpha = 0.95 \\ \alpha = 0.05 \end{array} \right\} : Z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$$

Sustituyendo por los datos del enunciado en el intervalo de confianza:

$$\left(18,84 - 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{4}}, 18,84 + 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{4}} \right) = (18,84, 19,33)$$

Con una probabilidad del 95% se puede estimar que el tiempo de vida útil del modelo de televisor va a estar comprendido entre 17,84 y 19,33 miles de horas.

b. El error máximo admitido viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{\text{máx}} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Expresión que permite despejar el tamaño muestral en función del error máximo admitido.

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}} \right)^2$$

El valor crítico ($Z_{\alpha/2}$) coincide con el del apartado anterior.

$$n > \left(1,96 \cdot \frac{0,5}{0,2} \right)^2 = 24,01$$

$$n \geq 25$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} kx - 2y + 7z = 8 \\ x - y + kz = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
- b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
- c) Resuélvase el sistema para k = 0

Solución.

a. Las matrices que definen el tipo de sistema son la matriz de coeficientes (A) y ampliada (A*).

$$A = \begin{pmatrix} k & -2 & 7 \\ 1 & -1 & k \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \leq \text{rg } A^* \leq n = 3$$

Si $|A| \neq 0$, $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n$ sistema compatible determinado, teniendo en cuenta esto, se estudia el tipo de solución para los valores del parámetro k que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\det A = \begin{vmatrix} k & -2 & 7 \\ 1 & -1 & k \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + k + 2$$

$$|A| = 0: -k^2 + k + 2 = 0: \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Discusión.

i. Si $k \neq -1, 2 \Rightarrow |A| \neq 0$: $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n$ Sistema compatible determinado.

ii. Si $k = -1$. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $|A| = 0$: $\text{rg } A < 3$. $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\text{rg } A^* \geq 2$. De los dos menores orlados al menor $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, solo

queda por estudiar el formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ $\text{rg } A^* = 3$.

$\text{rg } A = 2 \neq \text{rg } A^* = 3$. Sistema incompatible

iii. Si $k = 2$. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $|A| = 0$: $\text{rg } A < 3$. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\text{rg } A^* \geq 2$. De los dos menores orlados al menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, solo

queda por estudiar el formado por la 2ª, 3ª y 4ª columna $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\text{rg } A^* < 3$.

$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < n = 3$. Sistema compatible indeterminado

b. Para $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado de dos ecuaciones y tres incógnitas. Para escoger las ecuaciones que son linealmente independientes se toman las que contienen los coeficientes del menor de orden dos (3^a y 4^a).

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

Para resolver el sistema se transforma una variable en parámetro, recomendando tomar como parámetro la variable cuyos coeficientes no formaron el menor de orden 2 (x).

$$x = \lambda : \begin{cases} -y + 2z = 2 - \lambda \\ y + z = 2 + \lambda \end{cases}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 + \lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3} + \lambda \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 - \lambda \\ 1 & 2 + \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3}$$

Solución: $\left(\lambda, \frac{2}{3} + \lambda, \frac{4}{3} \right)$

c. Para $k = 0$, sistema compatible determinado, se resuelve por el método de Cramer.

$$\begin{cases} -2y + 7z = 8 \\ x - y = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}; \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}; \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

$$|A(k=0)| = -0^2 + 0 + 2 = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = 12; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = 10; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ - & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = 4$$

Solución: (12, 10, 4)

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{3}{bx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Calcúlense los valores de a y b , para que f sea continua y derivable en todos los puntos.
- Para $a = 6$ y $b = 3/4$, determinense los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX. Esbócese la gráfica de f .
- Para $a = 6$, $b = 3/4$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f , el eje OX y la recta vertical $x = 2$.

Solución.

a. Los valores de a y b se calculan planteando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a partir de las dos condiciones que se piden a la función.

i. Continua en $x = 1$: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$f(1) = -1^2 - 1 + a = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 - x + a) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{bx}$$

$$-2 + a = \frac{3}{b}$$

ii. Derivable en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{Si } x < 1 \\ \frac{-3}{bx^2} & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$-2 \cdot 1 - 1 = \frac{-3}{b \cdot 1^2}$$

$$-3 = \frac{-3}{b} : b = 1$$

Sustituyendo el valor de b en la condición de continuidad se calcula a.

$$-2 + a = \frac{3}{1} : a = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b. $a = 6; b = 3/4: f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 6 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Cortes con OX ($y = 0$): $\begin{cases} -x^2 - x + 6 = 0: \begin{cases} x = -3 \in (-\infty, 1] \\ x = 2 \notin (-\infty, 1] \end{cases} \text{ No se admite} \\ \frac{4}{x} \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dominio} \end{cases}$

La función corta al eje OX en el punto $(-3, 0)$.

- Corte con OY ($x = 0$). $y = f(0) = -0^2 - 0 + 6 = 6$. La función corta a OY en el punto $(0, 6)$.

Gráfica. La gráfica consta de dos intervalos, el primero $(-\infty, 1]$ parábola abierta hacia $-\infty$ con vértice (máximo) en:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2}; y_v = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4}$$

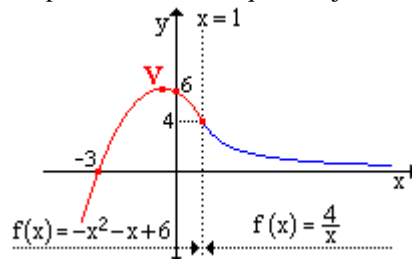
$$V = \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

El segundo intervalo, $(1, +\infty)$, es una hipérbola equilátera.

Por último, se debe calcular el valor que toma la función cuando tiende a 1 por la izquierda y por la derecha.

$$f(1^-) = -1^2 - 1 + 6 = 4; f(1^+) = \frac{4}{1} = 4$$

Por lo tanto la función en el punto $x = 1$ habrá que dibujarla de forma continua.

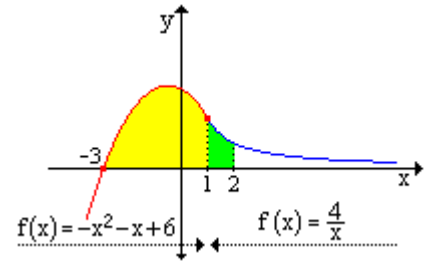


c. El área que se pide consta de dos partes diferenciadas. La 1ª en el intervalo $[-3, 1]$ bajo la curva $f(x) = -x^2 - x + 6$. La 2ª en el intervalo $(1, 2]$ bajo la curva $f(x) = \frac{4}{x}$.

$$A = \int_{-3}^1 (-x^2 - x + 6) dx + \int_1^2 \frac{4}{x} dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-3}^1 + (4 \ln x) \Big|_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 6 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} + 6 \cdot (-3) \right) + 4 \ln 2 - 4 \ln 1 =$$

$$= \frac{31}{6} - \left(-\frac{27}{2} \right) + 4 \ln 2 = \frac{56}{3} + 4 \ln 2$$



Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

- Obtener al menos un seis en el total de los seis lanzamientos.
- Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

Solución.

a. Aunque se puede hacer por intersección de sucesos independientes, lo más práctico es hacerlo mediante una variable discreta (x) con distribución Binomial ($B(n, p)$).

$x \equiv$ número de veces que sale cara seis al lanzar un dado seis veces.

$N \equiv$ número de pruebas (6).

$p \equiv$ probabilidad de éxito $\left(\frac{1}{6}\right)$.

$q \equiv$ probabilidad de no éxito $\left(\frac{5}{6}\right)$.

$r \equiv$ número de éxitos.

$$x : B\left(6, \frac{1}{6}\right)$$

En estas distribuciones, la probabilidad de que en N pruebas haya r éxitos viene dada por la expresión:

$$p(N, r) = \binom{N}{r} \cdot p^r \cdot q^{N-r}$$

Aplicando los datos del problema:

$$p(6, r \geq 1) = p(\overline{6, r < 1}) = 1 - p(6, r < 1) = 1 - p(6, 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,6651$$

La probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar 6 veces un dado es de 66,51%.

b. En este caso el suceso se resuelve como intersección de sucesos independientes.

$A \equiv$ Obtener 6 en el lanzamiento de un dado.

$$p(A \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap A) \stackrel{\text{S. Independientes}}{=} p(A) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(A) = (p(A))^2 \cdot (p(\bar{A}))^4 =$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,0134$$

La probabilidad de que al lanzar un dado seis veces el primero y último sean seis y los demás cualquier otro es del 1,34%.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente de una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 0,5 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 llamadas y se obtiene un tiempo medio de espera igual a 6 minutos.

- a) Determínese un intervalo de confianza del 95% para el tiempo medio de espera de una llamada a dicha línea de atención al cliente.
- b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que debe observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total igual o inferior a 1 minuto?

Solución.

a. $x \equiv$ tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente. $x: N(\mu, \sigma)$
 Para estimar el valor medio de la variable (media poblacional μ) se ha tomado una muestra de tamaño 100 obteniendo como valor medio $\bar{x}_0 = 6$ min .

El intervalo de confianza para la media poblacional a partir de la media de una muestra de tamaño 100 viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x}_0 - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_0 + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$Z_{\alpha/2}$ Es el valor crítico que se obtiene a partir del nivel de confianza.

$$\text{Nivel de confianza} = 0,95 = 1 - \alpha : \alpha = 0,06$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0,05}{2}\right) = \phi^{-1}(0,9750) = 1,96$$

Sustituyendo los valores en el intervalo:

$$\left(6 - 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{100}}, 6 + 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{100}} \right) = (5,9, 6,1)$$

Con una confianza del 95% se puede estimar que el tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente va a estar comprendido entre 5,9 y 6,1 min.

b. El error máximo admitido viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{\text{máx}} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Expresión que permite despejar el tamaño muestral en función del error máximo admitido.

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}} \right)^2$$

El valor crítico ($Z_{\alpha/2}$) se supone que es el mismo que el del apartado anterior. El error máximo admitido se calcula a partir de la amplitud del intervalo (c).

$$c = 2\varepsilon_{\text{máx}} \Rightarrow \varepsilon_{\text{máx}} = \frac{c}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$n > \left(1,96 \cdot \frac{0,5}{0,5} \right)^2 = 3,84 \Rightarrow n \geq 4$$