UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
SEPTIEMBRE 2010
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
Fase general

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\\-4&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\22\\7a\end{pmatrix}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro a.
b) Resuélvase el sistema para el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para a = 0.

Solución.

Operando e igualando las matrices se obtiene el sistema de ecuaciones lineales. Este primer paso no es necesario hacerlo.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\\-4&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\22\\7a\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}x\\2x\\x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y-z\\-3y+2z\\-4y+az\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\22\\7a\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}x+y-z\\2x-3y+2z\\x-4y+az\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\22\\7a\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x+y-z=1\\2x-3y+2z=22\\x-4y+az=7a\end{cases}$$

a. El sistema esta definido por la matriz de coeficientes (A) y la matriz ampliada (A*).

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-3&2\\1&-4&a\end{pmatrix} : A^*=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&-3&2&22\\1&-4&a&7a\end{pmatrix} : \text{rg } A\le \text{rg } A^*\le n=3$$

Si el determinante de la matriz de coeficientes en distinto de cero, el rg A = 3 = rg A* = n, el sistema es compatible determinado. Se estudia el tipo de solución para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-3&2\\1&-4&a\end{vmatrix}=-3a+2+8-(3+2a-8)=15-5a$$

$$|A|=0:15-5a=0:a=3$$

Discusión.

i. Si $a\ne 3$. $|A|\ne 0\Rightarrow$ rg A = rg A* = n = 3. Sistema compatible determinado.

ii. Si a = 3. $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-3&2\\1&-4&3\end{pmatrix}$ $|A|=0\Rightarrow \text{rg } A<3$. $\begin{vmatrix}1&1\\2&-3\end{vmatrix}=-5\ne 0\Rightarrow \text{rg } A=2$. El rango de la ampliada se estudia a partir del menor de orden dos, estudiando sus menores orlados. De los dos menores orlados, uno es el determinante de la matriz de coeficientes, que es nulo, y solo nos queda uno más por estudiar que está formado por las columnas 1ª, 2ª y 4ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 22 \\ 1 & -4 & 21 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg } A^* < 3$$

rg A = rg A* = 2 < n = 3. Sistema compatible indeterminado

b. Para a = 3. $S: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 22 \\ x - 4y + 3z = 21 \end{cases} \xrightarrow{rgA = rgA^* = 2} S': \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 22 \end{cases}$

El rango del sistema (2), informa del número de ecuaciones linealmente independientes, que son las que se deberán usar para resolver el sistema. Para seleccionar las ecuaciones linealmente independientes, recomiendo tomar las ecuaciones que contienen a los coeficientes del menor de orden dos distinto de cero que ha permitido definir el rango del sistema, de esta forma nos aseguramos que las ecuaciones escogidas son linealmente independientes, en nuestro caso la 1ª y la 2ª.

Como el número de incógnitas es superior al número de ecuaciones linealmente independientes, es necesario transformar una incógnita en parámetro y resolver el sistema en función del parámetro. En la selección de la incógnita que se debe transformar en parámetro, recomiendo tomar como parámetro la variable cuyos coeficientes no se usaron en el menor de orden dos (z).

$$S': \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 22 \end{cases} \xrightarrow{z = \lambda} S': \begin{cases} x + y = 1 + \lambda \\ 2x - 3y = 22 - 2\lambda \end{cases}$$

Para resolver el sistema se puede usar cualquier método, recomiendo el método de Cramer por ser el más metódico.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 \\ 22 - 2\lambda & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3 - 3\lambda - (22 - 2\lambda)}{-5} = \frac{-25 - \lambda}{-5} = 5 + \frac{1}{5}\lambda$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ 2 & 22 - 2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{22 - 2\lambda - (2 + 2\lambda)}{-5} = \frac{20 - 4\lambda}{-5} = -4 + \frac{4}{5}\lambda$$

Solución: $\left(5 + \frac{1}{5}\lambda, -4 + \frac{4}{5}\lambda, \lambda\right) \forall \lambda \in R$

c. a = 0: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 22 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$ Sistema compatible determinado. $|A| = 15 - 5a \overset{a=0}{=} 15$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 22 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{15} = \frac{32}{5} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 22 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{15} = \frac{8}{5} \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 22 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{15} = 7$$

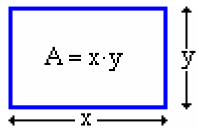
Solución: $\left(\frac{32}{5}, \frac{8}{5}, 7\right)$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlese sus dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

Solución.

Sean x la longitud de la base e y la de la altura del marco. El coste de construcción de cualquier marco en función de x e y viene dado por la expresión:



$$P(x, y) = 25 \cdot 2x + 50 \cdot 2y = 50x + 100y$$

Si al marco se le pone la condición de área igual a 2 m^2, se puede expresar el precio en función de la longitud de la base solamente, usando la igualdad del área para expresar y en función de x.

$$\left.\begin{array}{l} P(x, y) = 50x + 100y \\ 2 = x \cdot y \ : \ y = \dfrac{2}{x} \end{array}\right\} : P(x) = 50x + 100\frac{2}{x} = 50x + \frac{200}{x}$$

para obtener la longitud de la base del marco de 2 m^2 que nos de el precio mínimo, se deriva la expresión y se iguala a cero, procediendo a continuación de igual forma que en los extremos relativos (máx/mín) de las funciones.

$$P'(x) = 50 - \frac{200}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 : \qquad 50 - \frac{200}{x^2} = 0 : \qquad x^2 = 4 : \qquad x = \pm 2$$

El valor negativo no tiene sentido al tratarse de una longitud. Para comprobar que el valor positivo da un precio mínimo, se sustituye en la segunda derivada.

$$P''(x) = \frac{400}{x^3} : \ P''(2) = \frac{400}{2^3} > 0 \ \Rightarrow \text{En } x = 2\text{, la función alcanza un mínimo.}$$

Las dimensiones que hacen coste mínimo son: $\begin{cases} \text{largo} : x = 2 \text{ m} \\ \text{ancho} : y \underset{y = 2/x}{=} \dfrac{2}{2} = 1 \text{ m} \end{cases}$

El coste mínimo es: $P(2,1) = 50 \cdot 2 + 100 \cdot 1 = 200$ €

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, tales que:

$$p\left(A/C\right) \geq p\left(B/C\right) \ ; \ p\left(A/\overline{C}\right) \geq p\left(B/\overline{C}\right)$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es siempre cierta.

a) $p(A) < p(B)$ **b)** $p(A) \geq p(B)$

Solución.

Partiendo de las desigualdades propuestas hay que ver a cual de las dos opciones nos lleva. El ejercicio se puede hacer de diferentes formas, quedaros con la que os resulte más sencilla.

1º Aplicando el teorema de Bayes a cada una de las desigualdades propuestas

$$p\left(A/C\right) \geq p\left(B/C\right) \xrightarrow{\text{BAYES}} \frac{p(A \cap C)}{p(C)} \geq \frac{p(B \cap C)}{p(C)} : \text{Simplificando } p(A \cap C) \geq p(B \cap C) \ (1)$$

$$p\left(A/\overline{C}\right) \geq p\left(B/\overline{C}\right) \xrightarrow{\text{BAYES}} \frac{p(A \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} \geq \frac{p(B \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} : \text{Simplificando } p(A \cap \overline{C}) \geq p(B \cap \overline{C}) \ (2)$$

La desigualdad (2) esta formada por los sucesos solo A y solo B, que se pueden expresar en función de ellos y su intersección con el suceso C.

$$\left.\begin{array}{r} p\left(A\cap\overline{C}\right)=p(A)-p(A\cap C) \\ p\left(B\cap\overline{C}\right)=p(B)-p(B\cap C) \end{array}\right\} \xrightarrow{(2)} p(A)-p(A\cap C)\geq p(B)-p(B\cap C)\ (3)$$

Ordenando la expresión (3) de forma que las intersecciones queden a un lado y los sucesos simples al otro, podremos utilizar la desigualdad (1) para simplificar.

$$p(A)-p(B)\geq p(A\cap C)-p(B\cap C)$$

Si $p(A\cap C)\geq p(B\cap C)\ \Rightarrow\ p(A\cap C)-p(B\cap C)\geq 0$

$$\left.\begin{array}{r} p(A)-p(B)\geq p(A\cap C)-p(B\cap C) \\ p(A\cap C)-p(B\cap C)\geq 0 \end{array}\right\} : p(A)-p(B)\geq 0 \Rightarrow \boxed{p(A)\geq p(B)}$$

Siempre se cumplirá **b)**.

2º Aplicando el teorema de Bayes a cada una de las desigualdades propuestas

$$p\left(A/C\right)\geq p\left(B/C\right)\xrightarrow{\text{BAYES}}\frac{p(A\cap C)}{p(C)}\geq\frac{p(B\cap C)}{p(C)} : \text{Simplificando } p(A\cap C)\geq p(B\cap C)\ (1)$$

$$p\left(A/\overline{C}\right)\geq p\left(B/\overline{C}\right)\xrightarrow{\text{BAYES}}\frac{p\left(A\cap\overline{C}\right)}{p\left(\overline{C}\right)}\geq\frac{p\left(B\cap\overline{C}\right)}{p\left(\overline{C}\right)} : \text{Simplificando } p\left(A\cap\overline{C}\right)\geq p\left(B\cap\overline{C}\right)\ (2)$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total a las intersecciones.

$$(1)\ \rightarrow\ p(A)\cdot p\left(C/A\right)\geq p(B)\cdot p\left(C/B\right)$$

$$(2)\ \rightarrow\ p(A)\cdot p\left(\overline{C}/A\right)\geq p(B)\cdot p\left(\overline{C}/B\right)$$

Sumando las desigualdades y sacado factor común de p(A) en el primer miembro y de p(B) en el segundo.

$$p(A)\cdot\left(p\left(C/A\right)+p\left(\overline{C}/A\right)\right)\geq p(B)\cdot\left(p\left(C/B\right)+p\left(\overline{C}/B\right)\right)$$

Teniendo en cuenta que $p\left(C/A\right)+p\left(\overline{C}/A\right)=1$ por ser sucesos complementarios e igual para el caso de estar condicionado a B:

$$p(A)\cdot\overbrace{\left(p\left(C/A\right)+p\left(\overline{C}/A\right)\right)}^{1}\geq p(B)\cdot\overbrace{\left(p\left(C/B\right)+p\left(\overline{C}/B\right)\right)}^{1}$$

$$p(A)\cdot 1\geq p(B)\cdot 1\Rightarrow\boxed{p(A)\geq p(B)}$$

Siempre se cumplirá **b)**.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320. Se toma una muestra simple de 36 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50.

b) Determínese un intervalo de confianza del 95% para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a 4820.

Solución.

a. Se pide calcular la probabilidad de que las medias de las muestras de tamaño 36 de una variable continua con distribución Normal, estén en un intervalo determinado mediante un valor absoluto.

$$p\left(\left|\overline{x}-\mu\right|\geq 50\right) :\ p\left(-50\geq\overline{x}-\mu\geq 50\right) :\ p\left(\mu-50\geq\overline{x}\geq\mu+50\right)$$

Si la variable continua x sigue una distribución Normal, las medias de la muestras de tamaño 36 también siguen una distribución normal con la misma media y diferente desviación.

$$x : N(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=36} \overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{36}}\right)$$

Los parámetros de la distribución de las medias maestrales permiten tipificar la variable.

$$\overline{x} = \mu - 50 \quad z = \frac{\mu - 50 - \mu}{320/\sqrt{36}} = \frac{-50}{53,\widehat{3}} \cong -0,94$$
$$\overline{x} = \mu + 50 \quad z = \frac{\mu - 50 + \mu}{320/\sqrt{36}} = \frac{50}{53,\widehat{3}} \cong 0,94$$

Con la variable tipificada la expresión queda:

$$p(\mu - 50 \geq \overline{x} \geq \mu + 50) = p(-0,94 \geq z \geq 0,94) = p(z \leq -0,94) + p(z \geq 0,94) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Por simetria} \\ p(z \leq -0,94) = p(z \geq 0,94) \end{matrix} \right\} = 2 \cdot p(z \geq 0,94) = \{\text{Por complementario}\} = 2 \cdot p\left(\overline{z < 0,94}\right) =$$

$$= 2 \cdot (1 - p(z < 0,94)) = 2 \cdot (1 - 0,8264) = 0,3472$$

$$p(|\overline{x} - \mu| \geq 50) = 34,72\%$$

Teniendo en cuenta que la N(0, 1) es simétrica:

b. El intervalo de confianza para la media de una variable continua a partir de la media de una muestra de tamaño n de dicha variable es:

$$\left(\overline{x}_o - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico $\left(z_{\alpha/2}\right)$, se obtiene a partir del nivel de confianza $(1 - \alpha)$.

$$\left. \begin{matrix} z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = 0,95 : \alpha = 0,05 \end{matrix} \right\} : z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0,05}{2}\right) = \phi^{-1}(0,9750) = 1,96$$

Sustituyendo por los valores y operando:

$$\left(4820 - 1,96 \cdot \frac{320}{\sqrt{36}}, 4820 + 1,96 \cdot \frac{320}{\sqrt{36}}\right) = (4715,5 ; 4924,5)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6 m^2 por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede suministrar más de 75 kg de pintura y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

Solución.

Programación lineal.

- **Definición de variables.**

$x \equiv$ kg pintura comprados al proveedor A $\quad$ $y \equiv \equiv$ kg pintura comprados al proveedor B

- **Función objetivo.**

$$F(x, y) = 1 \cdot x + 1{,}2 \cdot y = x + 1{,}2y$$

- **Restricciones.**

i. "*Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m²*"

$$6x + 8y \geq 480$$

ii. "*Ningún proveedor le puede suministrar más de 75 kg de pintura*"

$$0 \leq x \leq 75 \qquad 0 \leq y \leq 75$$

iii. "*El presupuesto máximo del pintor es de 120 euros*"

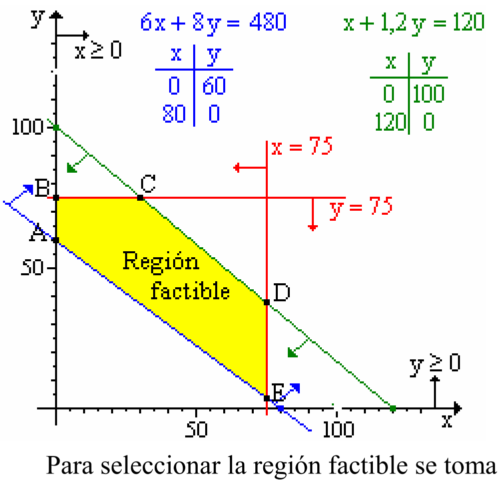
$$x + 1{,}2y \leq 120$$

iv. "Variables no negativas"

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Se pide minimizar F(x, y) = x + 1,2y con las siguientes restricciones: $\begin{cases} 6x + 8y \geq 480 \\ x \leq 75 \ ; \ \ y \leq 75 \\ x + 1{,}2y \leq 120 \\ x \geq 0 \ ; \ \ y \geq 0 \end{cases}$

- **Región factible. Vértices.**



$A: \begin{cases} x = 0 \\ 6x + 8y = 480 \end{cases} : A(0, 60)$

$B: \begin{cases} x = 0 \\ y = 75 \end{cases} : B(0, 75)$

$C: \begin{cases} x + 1{,}2y = 120 \\ y = 75 \end{cases} : C(30, 75)$

$D: \begin{cases} x + 1{,}2y = 120 \\ x = 75 \end{cases} : D(75, 37{,}5)$

$E: \begin{cases} x = 75 \\ 6x + 8y = 480 \end{cases} : E(75, 3{,}75)$

Para seleccionar la región factible se toma el punto (0, 0) y se comprueba cuales restricciones lo cumplen, si lo cumple, la región donde esta el punto respecto de la restricción es la factible, si no lo cumple, será la contraria.

$6x + 8y \geq 480 \xrightarrow{(0,0)} 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \geq 480 : \ 0 \geq 480$ No se cumple

$x + 1{,}2y \leq 120 \xrightarrow{(0,0)} 0 + 1{,}2 \cdot 0 \leq 120 : \ 0 \leq 1280$ Se cumple

$x \leq 75 \xrightarrow{(0,0)} 0 \leq 75$ Se cumple

$y \leq 75 \xrightarrow{(0,0)} 0 \leq 75$ Se cumple

- **Optimación**.

	x	y	F(x, y)
A	0	60	72
B	0	75	90
C	30	75	120
D	75	37,5	120
E	75	3,75	79,5

El mínimo coste cumpliendo las restricciones propuestas se obtiene comprando 60 kg de la pintura B, siendo el coste mínimo de 72 €.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-a & \text{si} \quad x\le -1 \\ -3x^2+b & \text{si} \quad -1<x<1 \\ \log x + a & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense a, b, para que la función f sea continua en todos los puntos.
b) Para a = 0, b = 3, represéntese gráficamente la función f.
c) Para a = 0, b = 3, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Nota.– La notación log representa al logaritmo neperiano

Solución.

a. La función está definida por expresiones polinómicas, continuas en sus dominios de definición. Para que la función sea continua, deberá ser continua en los puntos frontera.

En $x = -1$

$$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$$

Por definición de límite:

$$f(-1)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)$$

Se calculan los términos de la igualdad por separado.

$$f(-1)=2\cdot(-1)^2-a=2-a$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(2x^2-a\right)=2\cdot(-1)^2-a=2-a$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(-3x^2+b\right)=-3\cdot(-1)^2+b=-3+b$$

Para que la función sea continua en $x = -1$ se debe cumplir:

$$2-a=-3+b \ : \ a+b=5$$

En x = 1:

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$$

Por definición de límite:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Se calculan los términos de la igualdad por separado.

$$f(1)=\log 1+a=0+a=a$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-3x^2+b\right)=-3\cdot 1^2+b=-3+b$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\log x+a\right)=\log 1+a=0+a=a$$

Para que la función sea continua en x = 1 se debe cumplir:

$$a=-3+b \ : \ a-b=-3$$

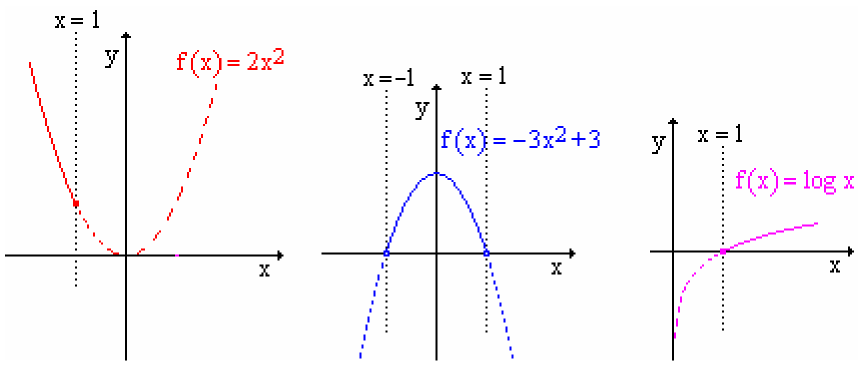
Las condiciones de continuidad en x = –1 y en x = 1 permiten plantear un sistema de ecuaciones con el que calcular los valores de a y b.

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=-3 \end{cases} : a = 1\ ;\quad b = 4$$

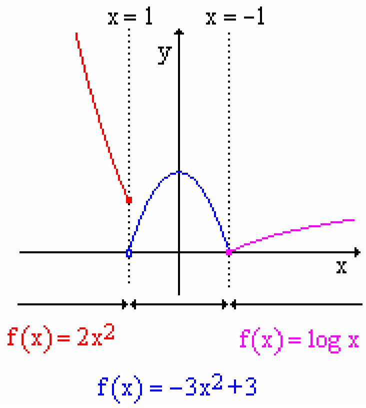
$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{si} & x\le -1 \\ -3x^2+4 & \text{si} & -1<x<1 \\ \log x+1 & \text{si} & x\ge 1 \end{cases}$$

b. Para a = 0, b = 3: $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{si} & x\le -1 \\ -3x^2+3 & \text{si} & -1<x<1 \\ \log x & \text{si} & x\ge 1 \end{cases}$

La función está definida por funciones sencillas cuyas gráficas se representan a continuación.



La función f(x) esta formado por los trazos continuos de cada una de ellas, si los representamos sobre un mismo eje de coordenadas, se obtiene la gráfica de la función.



c. $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{si} & x\le -1 \\ -3x^2+3 & \text{si} & -1<x<1 \\ \log x & \text{si} & x\ge 1 \end{cases}$ Teniendo en cuenta la definición de la función:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(-3x^2+3\right)dx=\left(\frac{-3x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{1}=\left(x^3+3x\right]_{-1}^{1}=\left(1^3+3\cdot 1\right)-\left((-1)^3+3\cdot(-1)\right)=$$
$$=4-(-4)=8$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se consideran los siguientes sucesos:

- Suceso A: La economía de un cierto país está en recesión.
- Suceso B: Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.

Se sabe que

$$p(A)=0{,}005 \quad ; \quad p\left(B/A\right)=0{,}95 \quad ; \quad p\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=0{,}96$$

a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.
b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

Nota.- La notación $\overline{A}$ representa el suceso complementario de A

Solución.

a. $p\left(A\cap\overline{B}\right)=p(A)\cdot p\left(\overline{B}/A\right)=p(A)\cdot\left(1-p\left(B/A\right)\right)=0{,}005\cdot(1-0{,}95)=0{,}00025=0{,}025\%$

b. $p(B)=p\left((A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=p(A\cap B)+p\left(\overline{A}\cap B\right)=p(A)\cdot p\left(B/A\right)+p\left(\overline{A}\right)\cdot p\left(B/\overline{A}\right)=$

$=p(A)\cdot p\left(B/A\right)+(1-p(A))\cdot\left(1-p\left(\overline{B}/\overline{A}\right)\right)=0{,}005\cdot 0{,}95+(1-0{,}005)\cdot(1-0{,}96)=0{,}04455=4{,}45\%$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Para estudiar la media de una población con distribución normal de desviación típica igual a 5, se ha extraído una muestra aleatoria simple de tamaño 100, con la que se ha obtenido el intervalo de confianza (173,42 ; 176,56) para dicha población.

a) Calcúlese la media de la muestra seleccionada.
b) Calcúlese el nivel de confianza del intervalo obtenido.

Solución.

a. Por tratarse de un intervalo de probabilidad, y por definición de estos (intervalos centrados en la media), la media muestral es la media aritmética de los extremos del intervalo.

$$\overline{x}_o=\frac{173{,}42+176{,}56}{2}=174{,}99$$

b. El nivel de confianza se puede calcular a partir de error.

$$\varepsilon=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z_{\alpha/2}=\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sigma}=\left\{\varepsilon=\frac{\text{Amplitud}}{2}=\frac{176{,}56-173{,}42}{2}=1{,}57\right\}=\frac{1{,}57\cdot\sqrt{100}}{5}=3{,}14$$

$$z_{\alpha/2}=\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=\phi\left(z_{\alpha/2}\right)=\phi(3{,}14)=0{,}9992$$

$$1-\frac{\alpha}{2}=0{,}9992\Rightarrow\alpha=2\cdot(1-0{,}9992)=0{,}0016$$

Nivel de confianza = 1 − α = 1 − 0,0016 = 0,9984

Nivel de confianza = 99,84%