MODELO JUNIO 2004
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder, razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad gráfica o de cálculo simbólico.
TIEMPO MÁXIMO: Una hora y treinta minutos.
CALIFICACIÓN: Cada ejercicio lleva indicada su puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones. Dependiente del parámetro m:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-z&=2\\ x+y+2z&=5\\ -x+(m+2)z&=3 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de m.
b) Resolver el sistema para m = 3.

Solución.
a. En todo sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, el sistema es compatible determinando, pudiéndose obtener la solución, por el método de Cramer. Teniendo en cuenta lo anterior , se discute el sistema para los valores del parámetro m que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & m+2 \end{vmatrix}=2m+4-2+0-(1+0+m+2)=m-1.$$

$$|A|=0;\qquad m-1=0;\qquad m=1$$

Discusión;

I) Si $m\neq 1\Rightarrow |A|\neq 0$ sistema compatible determinado.

II) Si $m=1\begin{cases} 2x+y-z=2\\ x+y+2z=5\\ -x\quad +3z=3 \end{cases}$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{E_2=E_2-2E\\ E_3=E_3+E_1}]{}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & -5 & -8\\ 0 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}\xrightarrow[E_3=E_3+E_2]{}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & -5 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^1:\begin{cases} x+y+2z=5\\ \quad y+5z=8 \end{cases}\qquad \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

b. Para m = 3; Sistema compatible determinado.
Método de Cramer:

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}\qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}\qquad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

$$|A|=m-1=3-1=2$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{2}=\frac{-6}{2}=-3;\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{2}=\frac{16}{2}=8;\qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 5\\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=x+\frac{1}{x} \qquad x\neq 0$$

a) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.
b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.
c) Esbozar la gráfica f(x).

Solución.

a. La condición necesaria y suficiente para que una función y =f (x) alcance en x = x_0 un extremo relativo (máximo o mínimo) es que la primera derivada sea distinta de cero, con el siguiente criterio.

$$\text{Si } f'(x_0)=0\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } f''(x_0)<0\Rightarrow(x_0,f(x_0)) \text{ existe un máximo relativo}\\ \text{Si } f''(x_0)>0\Rightarrow(x_0,f(x_0)) \text{ existe un mínimo relativo}\end{cases}$$

$$f(x)=x+\frac{1}{x}=x+x^{-1}$$

$$f'(x)=1+(-1)\cdot x^{-2}=1-x^{-2}=1-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=0-(-2)\cdot x^{-3}=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$$

Igualando a cero la primera derivada, se localizan los posibles extremos relativos, la segunda derivada, confirma y diferencia los extremos relativos.

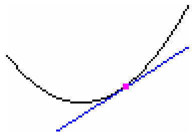
$$f'(x)=0: \quad 1-\frac{1}{x^2}=0: \quad 1=\frac{1}{x^2}: \quad x^2=1; \quad x=\pm1:\begin{cases}f(1)=1+\frac{1}{1}=2\Rightarrow(1,2)\\ f(-1)=-1+\frac{1}{-1}=-2\Rightarrow(-1,-2)\end{cases}$$

$$f''(1)=\frac{2}{1^3}=2>0\Rightarrow(1,2) \text{ Mínimo}$$

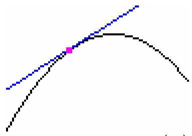
$$f''(-1)=\frac{2}{(-1)^3}=-2<0\Rightarrow(-1,-2) \text{ Máximo}$$

b. La curvatura de una función se estudia con el signo de la 2ª derivada según el siguiente criterio.

Si $f''(x)>0$, la curva estará por encima de la tangente. CONCAVA



Si $f''(x)<0$, la curva esta por debajo de su tangente. CONVEXA



$$f''(x)=\frac{2}{x^3}:\begin{cases}\text{Si } x<0\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow \text{convexa}\\ \text{Si } x>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow \text{concava}\end{cases}$$

c. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

Dominio: $D=\Re-\{0\}$

Corte con los ejes:

OX: y = 0: $\dfrac{x^2+1}{x}=0: x^2+1=0: x=\sqrt{-1}\notin\Re$ La función no corta al eje OX

OY: x = 0. La función no está definida en cero. La función no corta al eje OY.

Asíntotas:

-Vertical: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0}=\infty:\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty\end{cases}$

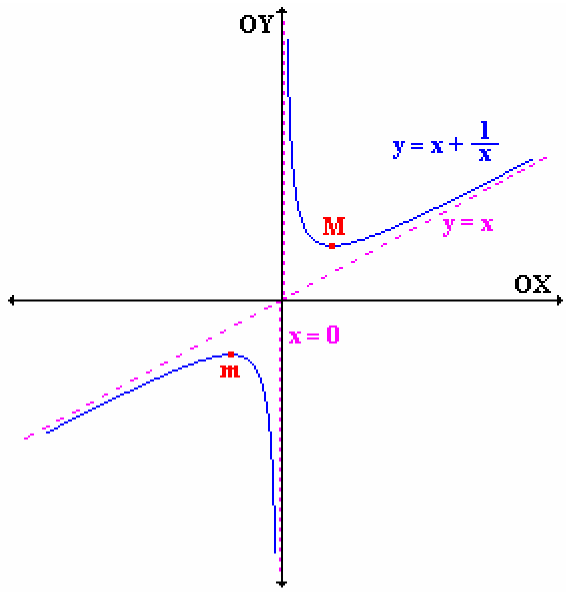
- Horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0}=\infty$ No existen asíntotas horizontales.

- Oblicuas: y = mx + n

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1}=\frac{1+0}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$y=x$$



3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Un rosal no está en buen estado y, por tanto, sise riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0,25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal se ha secado. ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

Solución.

Se define los siguientes sucesos.

$A\equiv$ Regar el rosal.

$B\equiv$ El rosal se mantiene.

Datos:

$$p\left(B/A\right)=p\left(\overline{B}/A\right)=\frac{1}{2}$$

$$p\left(B/\overline{A}\right)=0'25=\frac{1}{4}$$

$$p\left(\overline{A}\right)=\frac{2}{3};\quad p(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Se pide: $p\left(\bar{A}/\bar{B}\right)$

Aplicando el teorema de Bayes:

$$p\left(\bar{A}/\bar{B}\right)=\frac{p\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)}{p\left(\bar{B}\right)}=\frac{p\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)}{p\left[\left(A\cap\bar{B}\right)\cup\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)\right]}=\frac{p\left(\bar{A}\cap\bar{A}\right)}{p\left(A\cap\bar{B}\right)+p\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)}=\frac{p\left(\bar{A}\right)p\left(\bar{B}/\bar{A}\right)}{p(A)p\left(\bar{B}/A\right)+p\left(\bar{A}\right)p\left(\bar{B}/\bar{A}\right)}$$

Se conocen todos los valores excepto $p\left(\grave{B}/A\right)$, pero teniendo en cuenta que:

$$p\left(B/A\right)+p\left(\bar{B}/A\right)=1 \quad \text{Sucesos complementarios}$$

$$p\left(\bar{B}/A\right)=1-p\left(B/A\right)=1-0'25=0'75=\frac{3}{4}$$

Sustituyendo

$$p\left(\bar{A}/\bar{B}\right)=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}=0'75$$

La probabilidad de que no se halla regado si al final se ha secado es del 75%.

Otra forma de resolver el problema es por un cuadro de contingencia:

	Mantenerse (B)	**No mantenerse $\left(\bar{B}\right)$**	
Regar (A)	50	50	100
No regar ($\bar{A}$)	50	150	200
	100	200	300

Base de cáculo

Base de cálculo. Puede servir cualquier número, si se escoge con criterio salen valores que resultan bastante lógicos.

$$p\left(\bar{A}/\bar{B}\right)=\frac{p\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)}{p\left(\bar{B}\right)}=\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$$

4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que los ingresos diarios en una empresa siguen una distribución normal con media 400 euros y desviación típica 250 euros.

a) ¿Cómo se distribuye la media muestral aleatoria de tamaño n?

b) Se dispone de una muestra aleatoria de 25 observaciones. Calcular la probabilidad de que el promedio de ingresos esté entre 350 y 450 euros.

Solución.

$x \equiv$ Variable continua. Ingresos diarios.

$$x \to N(400, 250)$$

a. Si te toman muestras de tamaño n y de cada muestra se saca la medida (media muestral),se obtiene una distribución de medias muestrales $\left(\bar{x}\right)$

$$\bar{x} \to N\cdot\left(400, \frac{250}{\sqrt{n}}\right)$$

b. Para muestras de tamaño 25, las medias muestrales siguen una distribución normal:

$$n = 25; \qquad \bar{x} \to N\left(400, \frac{250}{\sqrt{25}}\right) = N(400, 50)$$

$p\left(350 < \bar{x} < 450\right)$ tipificando la variable.

$$z=\frac{x-400}{50}:\ \left\{\begin{array}{l}\text{Si}\ \ \bar{x}=350\Rightarrow z=\frac{350-400}{50}=-1'00\\ \text{Si}\ \ \bar{x}=450\Rightarrow z=\frac{450-400}{50}=1'00\end{array}\right\}$$

$$p\left(350<\bar{x}<450\right)=p\left(-1'00<z<1'00\right)=p\left(z<1'00\right)-p\left(z\le -1'00\right)=p\left(z<1'00-p\left(z\ge 1'00\right)\right)=$$

$$=p\left(z<1'00\right)-\left(1-p\left(z<1'00\right)\right)=2p\left(z<1'00\right)-1=2\phi\left(1'00\right)-1=\left\{\begin{array}{c}\text{Fila}:1'0\\ \text{Columnas}:0'00\end{array}\right\}=2\cdot 0'8413-1=0'6826$$

$$p\left(350<\bar{x}<450\right)=68'26\%$$

OPCIÓN B

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un centro dedicado a la enseñanza personalizada de idiomas tiene dos cursos, uno básico y otro avanzado, para los que dedica distintos recursos. Esta planificación hace que pueda atender entre 20 y 65 estudiantes del curso básico y entre 20 y 40 estudiantes del curso avanzado. El número máximo de estudiantes que en total puede atender es 100. los beneficios que obtiene por cada estudiante en el curso básico se estima en 145 euros y en 150 euros por cada estudiante del curso avanzado. Hallar qué número de estudiantes de cada curso proporciona el máximo beneficio.

Solución.

Definición de variables:

- $x \equiv$ número de estudiantes en el curso básico.
- $y \equiv$ número de estudiantes en el curso avanzado.

Función objetivo:

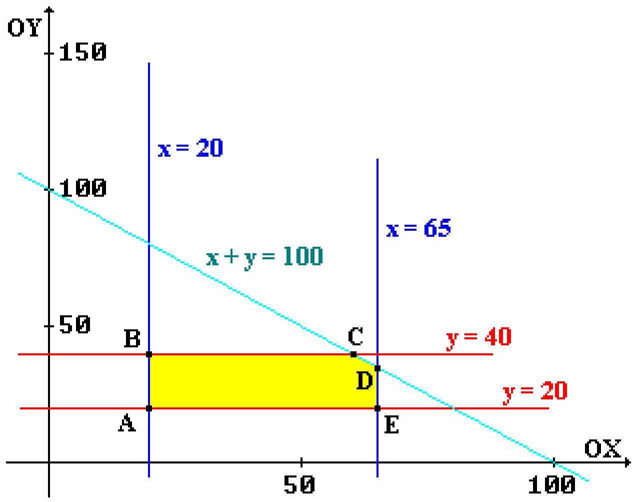
Se pide optimizar los beneficios que se obtienen por los cursos

$$B(x, y) = 145x + 150y$$

Restricciones que presenta la función de beneficios:

- $20 \le x \le 65 \rightarrow \begin{cases} x \ge 20 \\ x \le 65 \end{cases}$
- $20 \le y \le 40 \rightarrow \begin{cases} y \ge 20 \\ y \le 40 \end{cases}$
- $x + y \le 100$

Región factible



Vértices de la región factible:

$$A: \begin{cases} x = 20 \\ y = 20 \end{cases} \quad (20,20) \qquad B: \begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \end{cases} \quad (20,40)$$

$$C: \begin{cases} y = 40 \\ x + y = 100 \end{cases} \quad (60,40) \qquad D: \begin{cases} x + y = 100 \\ x = 65 \end{cases} \quad (65,35)$$

$$E: \begin{cases} x = 65 \\ y = 20 \end{cases} \quad (65,20)$$

Optimación:

	X	Y	B (x , y) = 145x + 150y
A	20	20	5.900
B	20	40	8.900
C	60	40	14.700
D	65	35	14.675
E	65	20	12.425

La función de beneficio sometida a las restricciones propuesta se hace máxima con 60 alumnos en el curso básico y 40 alumnos en el curso avanzado.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Para cada valor de a se considera la función

$$f(x) = 2x + ax^2 - 4\ln(x)$$

a) Calcular el valor del parámetro real a sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 1. calificar el extremo.
b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento para a = 3.
c) Hallar las asíntotas.

Observación: La notación ln representa el logaritmo neperiano.

Solución.

a. Si una función presenta un extremo relativo en $x = x_0$, entonces la derivada de la función en ese punto es nula.

$$f'(x) = 2 + 2ax - \frac{4}{x}$$

$$f'(1) = 0 \ ; \quad 2 + 2a \cdot 1 - \frac{4}{1} = 0$$

despejando a = 1

$$f(x) = 2x + x^2 - 4Ln(x)$$

b. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función se estudia en el signo de la primera derivada, con el siguiente criterio.

$$\text{Si} \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$
$$\text{Si} \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente}$$

$$f(x) = 2x + 3x^2 - 4lux$$

Derivando:

$$f'(x) = 2 + 6x - \frac{4}{x} = \frac{6x^2 + 2x - 4}{x} = \frac{2\cdot(3x^2 + x - 2)}{x}$$

– Ceros de $f'(x) = 0 \ ; \ 3x^2 + x - 2 = 0 : \begin{cases} x = -1 \\ x = 2/3 \end{cases}$

– Polos de $f'(x) \ ; \ x = 0$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $(0,+\infty)$ debido a la expresión Ln(x), el único punto donde puede cambiar de signo es $x = 2/3$:

$$\text{Si} \quad x \in \left(0, 2/3\right) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \quad \text{decreciente}$$
$$\text{Si} \quad x \in \left(2/3, +\infty\right) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \quad \text{creciente}$$

c. Asíntotas:

Verticales $D = (0,+\infty)$. La función presenta una asintota vertical en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \left(2x - ax^2 - 4Ln(x)\right) = 0 - 4 \cdot Ln(0^+) = -4\cdot(-\infty) = +\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \left(2x + ax^2 - 4Ln(x)\right) = a\cdot\infty^2 = \infty \quad \text{No tiene}$$

Oblicuas: (y = mx + n)

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - ax^2 - 4Ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 + ax - \frac{4lux}{x}\right) = 2 + a\cdot\infty - \frac{4lu\infty}{\infty} = 2 + \infty - 0 = \infty \quad \text{No tiene.}$$

3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Sobre los sucesos A y B se conoce las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0'7$$
$$P(B) = 0'5$$
$$P(A \cap B) = 0'45$$

Calcular:

a) $P(B/A)$
b) $P(A^C \cap B^C)$

Nota: A^C representa el suceso complementario del suceso A.

Solución.

a. Según Bayes:

$$p\left(B/_{A}\right) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{0'45}{0'70} = \frac{9}{14} = 0'64$$

b. Teniendo en cuenta la ley de Morgan que dice:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$
$$p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - p(A \cup B)$$

Siendo A y B son sucesos compatibles $(A \cap B \neq 0)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Sustituyendo:

$$p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - \left(p(A) + p(B) - p(A \cap B)\right) = 1 - (0'7 + 0'5 - 0'45) = 0'25$$

4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
El salario de los trabajadores de tina ciudad siguen una distribución normal con desviación típica 15 euros. Se quiere calcular un intervalo de confianza para el salario medio, con un nivel de confianza del 95%. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud de 6 euros.

Solución.

$x \equiv$ Salario $\qquad \overline{x} \equiv$ media de una muestra de n salarios $\quad c \equiv$ amplitud $= 2\varepsilon$

$$x : N(\mu, 15); \qquad \overline{x} : N\left(\mu, \frac{15}{\sqrt{n}}\right)$$

Se pide calcular el tamaño muestral para que el error máximo permitido no exceda de 6€ con un nivel de confianza$(1-\alpha)$ del 95%.

El error máximo permitido de una variable media muestral viene expresado por:

$$\varepsilon \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ecuación de la que se puede despejar el mínimo, tamaño muestral.

$$n \geq \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\sigma = 15 \ ; \quad \varepsilon = \frac{6}{2} = 3 \ ; \qquad Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 - \alpha = 0'95 \Rightarrow \ \alpha = 0'05 \Rightarrow \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'9750$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

$$n > \left(1'96 \cdot \frac{15}{3}\right)^2 = 96'04$$

$$n \geq 97$$