

MODELO JUNIO 2005
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si $A \cdot A^T = I$:

Nota: La notación A^T significa matriz transpuesta de A .

a) Estudiar si la siguiente matriz A es ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot 0 + \frac{-3}{5} \cdot \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot 0 + \frac{-3}{5} \cdot \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{-3}{5} \cdot 0 \\ \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot 0 + \frac{4}{5} \cdot \frac{-3}{5} & \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot 0 + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot 0 \\ 0 \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{-3}{5} & 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{4}{5} & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A es ortogonal y se cumple: $A \cdot A^t = I$

b) Siendo A la matriz del apartado anterior, resolver el sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la izquierda ambos miembros de la igualdad por la inversa de A , se consigue despejar la matriz incógnita. El producto de matrices no es conmutativo, para que la igualdad se mantenga se debe multiplicar en el mismo orden en los dos miembros.

$$A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular A^{-1} , se tiene en cuenta el apartado anterior, ya que, si A es ortogonal.

$$A \cdot A^t = I \quad ; \quad A^{-1} \cdot A \cdot A^t = A^{-1} \cdot I$$

$$I \cdot A^t = A^{-1} \quad ; \quad A^t = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x$

a) Calcular sus extremos relativos y su punto de inflexión.

Solución.

La condición necesaria y suficiente para que una función alcance un **extremo relativo** en un punto x_0 es que:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad f''(x_0) \neq 0$$

Con el siguiente criterio: $\begin{cases} \text{Si } f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \exists \text{ un M\AA XIMO} \\ \text{Si } f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \exists \text{ un M\I NIMO} \end{cases}$

Derivadas de $f(x)$:

$$f(x) = x^3 - 3x; \quad f'(x) = 3x^2 - 3; \quad f''(x) = 6x$$

igualando a cero la deriva se obtienen los posible puntos de extremo relativo.

$$f'(x) = 0; \quad 3x^2 - 3 = 0; \quad x = \pm 1: \begin{cases} \text{Si } x = 1: y = f(1) = -2 \\ \text{Si } x = -1: y = f(-1) = 2 \end{cases}$$

para comprobar si es un extremo relativo se usa el criterio de la derivada segunda

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow (-1, 2) \exists \text{ un M\AA XIMO}$$

$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow (1, -2) \exists \text{ un M\I NIMO}$$

La condición necesaria y suficiente para que una función tenga un **punto de inflexión** en x_0 es que:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad f''(x_0) \neq 0$$

Aplicando a la función propuesta, los posibles puntos de inflexión se calculan igualando a cero la segunda derivada y resolviendo la ecuación

$$f''(x_0) = 0; \quad 6x = 0; \quad x = 0; \quad f(0) = 0$$

para comprobar si es un punto de inflexión se utiliza el criterio de la tercera derivada.

$$f'''(0) = 6 \neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $(0, 0)$

b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

Solución.

$$\begin{aligned} p(G \cup G) &= p[(G \cap G) \cup (G \cap E) \cup (G \cap P) \cup (E \cap G) \cup (P \cap G)] = \\ &= p(G \cap G) + p(G \cap E) + p(G \cap P) + p(E \cap G) + p(P \cap G) = \\ &= 0'36 + 0'18 + 0'06 + 0'18 + 0'06 = 0'84 \end{aligned}$$

4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El número de días de ausencia en el trabajo de los empleados de cierta empresa para un período de seis meses, se puede aproximar mediante una distribución normal de desviación típica 1,5 días. Una muestra aleatoria de diez empleados ha proporcionado los siguientes datos

5 4 6 8 7 4 2 7 6 1

a) Determinar un intervalo de confianza del 90% para el número medio de días que los empleados de esa empresa han faltado durante los últimos seis meses.

Solución.

$x \equiv n^\circ$ de días de ausencia en el trabajo, se aproxima a una distribución normal de la que se conoce su desviación pero no su media.

$$x : N(\mu, \sigma) = N(\mu, 1'5)$$

Si en esta variable se toman muestras de tamaño 10 y de cada muestra se calcula la media, se obtiene una distribución de medias muestrales, que sigue teniendo un comportamiento normal, cuyos parámetros serán:

$$\bar{x} : N_x\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N_x\left(\mu, \frac{1'5}{\sqrt{10}}\right)$$

Se pide determinar un intervalo de confianza $(1 - \alpha)$ al 90% para el número medio de días de ausencia a partir de una media muestral conocida.

$$\left(\bar{x}_0 - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_0 + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\bar{x}_0 = \frac{5 + 4 + 6 + 8 + 7 + 4 + 2 + 7 + 6 + 1}{10} = 5$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{\alpha/2} &= \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha &= 0'90 : \alpha = 0'10 \end{aligned} \right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}(0'95) = 1'65$$

$$\left(5 - 1'65 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{10}}, 5 + 1'65 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{10}} \right) = (4'22, 5'78)$$

Se puede estimar con una probabilidad del 90% que la media de ausencia por empleado va a estar en el intervalo $(4'22, 5'78)$.

b) ¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 días, con el mismo nivel de confianza?

Solución.

El tamaño muestral para un nivel de confianza fijado, se estima a partir del máximo error admitido.

$$E \geq Z_{\alpha/z} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; n \geq \left(Z_{\alpha/z} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 = \left(1'65 \cdot \frac{1'5}{0'5} \right)^2 = 24'5...$$

Para $n \geq 25$ Muestras.

OPCIÓN B

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una compañía naviera dispone de dos barcos A y B para realizar un determinado crucero. El barco A debe hacer tantos viajes o más que el barco B, pero no puede sobrepasar 12 viajes. Entre los dos barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20. La naviera obtiene un beneficio de 18000 euros por cada viaje del barco A y 12000 euros por cada viaje del B. Se desea que las ganancias sean máximas.

a) Expresar la función objetivo.

Solución.

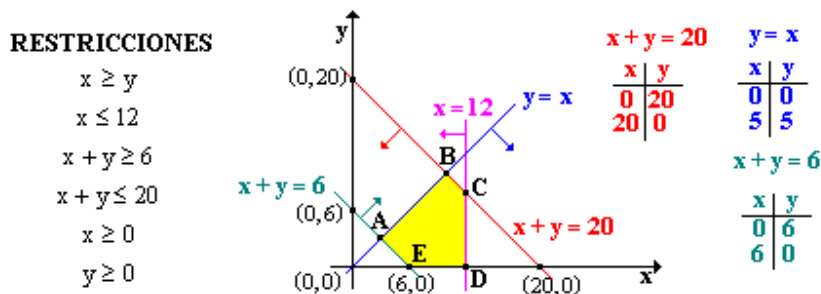
$x \equiv$ nº de cruceros realizados por A.

$y \equiv$ nº de cruceros realizados por B.

$$F(x, y) = 18.000x + 12.000y$$

b) Describir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.

Solución.



Vértices de la región factible:

$$A: \begin{cases} x + y = 6 \\ x = y \end{cases} \quad A = (3,3) \quad C: \begin{cases} x + y = 20 \\ x = 12 \end{cases} \quad D = (12,8)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 20 \\ x = y \end{cases} \quad E = (10,10) \quad D: \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \end{cases} \quad C = (12,0)$$

$$E: \begin{cases} x + y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \quad B = (6,0)$$

c) Hallar el número de viajes que debe efectuar cada barco para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución.

	x	y	F (x, y)=18.000x+12.000y
A	3	3	90.000
B	10	10	300.000
C	12	8	312.000
D	12	0	216.000
E	6	0	108.000

Con las restricciones propuesto el máximo beneficio es 312.000 €. Se consigue realizando 12 cruceros con el barco A y 8 con el barco B.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.

Solución.

Para que una función sea continua en un punto $x = a$ se debe cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(x) = f(a)$$

En $x = 1$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) : \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} : \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$$

La función es continua en $x = 1$

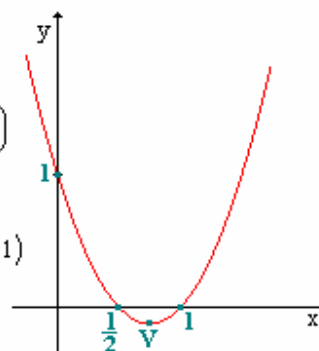
b) Esbozar su gráfica.

Solución.

$$y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$\text{VERT} : \left\{ \begin{array}{l} x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} \\ y_v = f(x_v) = 2 \cdot \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{8} \end{array} \right\} v = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8} \right)$$

$$\text{OX} : 2x^2 - 3x + 1 = 0 : \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array} \right. \quad \text{OY} : x = 0 : y = 1 : (0, 1)$$

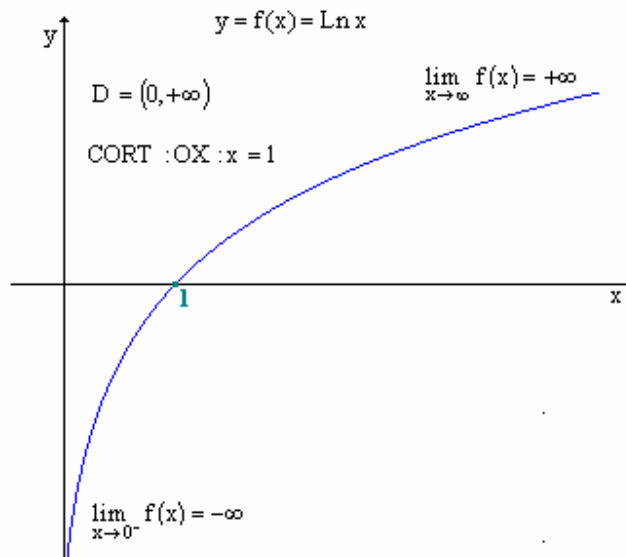


$$y = f(x) = \ln x$$

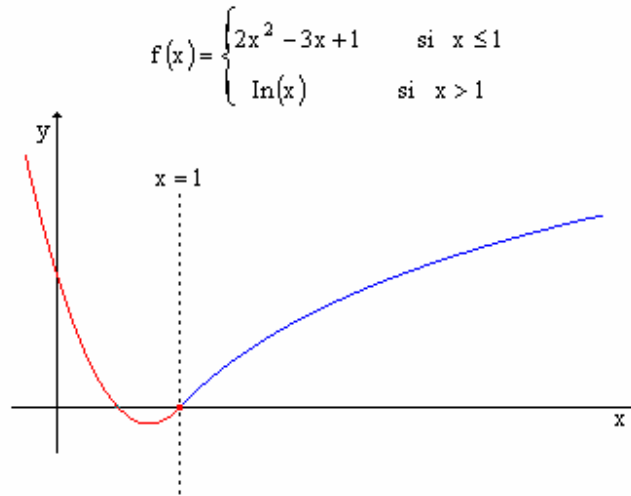
$$D = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{CORT} : \text{OX} : x = 1$$



Tomando de cada una de las funciones el intervalo correspondiente, se construye la gráfica de la función pedida.



c) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en $x = -1$.

Solución.

La ecuación de la tangente a $y = f(x)$ en $x_0 = -1$, en forma punto-pendiente teniendo la forma.

$$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$$

Donde $(-1, f(-1))$ es un punto de la recta (el de tangencia) $f'(-1)$, por la definida de derivada en un punto, es la pendiente de la recta tangente.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{Si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{Si } x > 1 \end{cases} \quad ; \quad f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{Si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 6$$

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1) - 3 = -7$$

$$r_{tg} \equiv y - 6 = -7 \cdot (x + 1)$$

Despejando a forma explícita:

$$y = -7x - 1$$

3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa:

	Chicas	Chicos
Científico- Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:

a) No curse la opción Científico- Tecnológica.

Solución.

	Chicas	Chicos	
Científico- Tecnológica	64	52	116
Humanidades y C. Sociales	74	50	124
	138	102	240

Por la definición axiomática de probabilidad.

$$p = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{124}{240} = \frac{31}{60}$$

b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

Solución.

$$p = \frac{\text{C.F.}}{\text{C.P.}} = \frac{50}{102} = \frac{25}{51}$$

4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La temperatura corporal en una cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media $36,7^{\circ}\text{C}$ Y desviación típica $3,8^{\circ}\text{C}$. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra:

a) Sea menor o igual a $36,9^{\circ}\text{C}$.

Solución.

$x \equiv$ Temperatura: $N(36,7, 3,8)$

Las medias de las muestras de tamaño 100 siguen también una distribución Normal:

$$\bar{x} : N_{\bar{x}}\left(36,7, \frac{3,8}{\sqrt{100}}\right) = N_{\bar{x}}(36,7, 0,38)$$

$$p(\bar{x} \leq 36,9) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = 36,9 \\ z = \frac{36,9 - 36,7}{0,38} = 0,53 \end{array} \right\} = p(z \leq 0,53) = \phi(0,53) = 0,7019 : p(\bar{x} \leq 36,9) = 70,19\%$$

b) Esté comprendida entre $36,5^{\circ}\text{C}$ y $37,3^{\circ}\text{C}$.

Solución.

$$p(36,5 < \bar{x} < 37,3) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = 36,5 \rightarrow z = \frac{36,5 - 36,7}{0,38} = -0,53 \\ \bar{x} = 37,3 \rightarrow z = \frac{37,3 - 36,7}{0,38} = 1,58 \end{array} \right\} = p(-0,53 < z < 1,58) = p(z \leq 1,58) - p(z < -0,53) =$$

$$= p(z \leq 1,58) - p(z > 0,53) = p(z \leq 1,58) - (1 - p(z \leq 0,53)) = \phi(1,58) - (1 - \phi(0,53)) = 0,9429 - (1 - 0,7019) = 0,6448$$

$$p(36,5 < \bar{x} < 37,3) = 64,48\%$$