MODELO 2006
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder, razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad gráfica o de cálculo simbólico.
TIEMPO MÁXIMO: Una hora y treinta minutos.
CALIFICACIÓN: Cada ejercicio lleva indicada su puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a

$$\begin{cases} x+y+(a+1)z=9 \\ 3x-2y+z=20a \\ x+y+2az=9 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

Solución.

El sistema se puede discutir de dos formas:

I. Por rango de matrices.
II. Por Gauss

I. Por Rangos de matrices. El sistema viene definido por las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2a\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 9\\ 3 & -2 & 1 & 20a\\ 1 & 1 & 2a & 9\end{pmatrix}$$

$$A\subset A^* \Rightarrow rgA\le rgA^*\le 3; \qquad n=3$$

En todo sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas, si el determinante de la matriz de coeficiente (A) es distinto de cero el sistema es compatible determinado. Teniendo en cuenta lo anterior se discute el sistema para los valores del parámetro que anulas el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a+1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2a\end{vmatrix}=-4a+1+3\cdot(a+1)-[-2(a+1)+6a+1]$$

$$|A|=-5a+5:\ |A|=0:\ a=1$$

Discusión:

1. Si $a\ne 1\Rightarrow |A|=0.\ rgA=rgA^*=n=3.$ Sistema compatible determinado.
2. Si $a=+1 \quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}:\ |A|=0\Rightarrow rgA<3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}\ne 0 \ \ rg\,A=2$

$A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 9\\ 3 & -2 & 1 & 20\\ 1 & 1 & 2 & 9\end{pmatrix}$ el único menor de orden 3 orlado a $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}$ que queda por estudiar es:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 9\\ 3 & -2 & 20\\ 1 & 1 & 9\end{vmatrix}=0\Rightarrow rg\,A^*=2$$

$$rg\,A=rg\,A^*=2<n=3$$

Sistema compatible indeterminado.

El sistema equivalente está formado por dos ecuaciones, que son las ecuaciones que contienen a los términos del menor de orden dos (1ª y 2ª ecuación).

$$S' \equiv \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 3x-2y+z=20 \end{cases}$$

II. Por Gauss:

$$\begin{cases} x+y+(a+1)z=9 \\ 3x-2y+z=20a \\ x+y+2az=9 \end{cases} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & \vdots & 9 \\ 3 & -2 & 1 & \vdots & 20a \\ 1 & 1 & 2a & \vdots & 9 \end{pmatrix} \underset{=}{E_1 \leftrightarrow E_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2a & \vdots & 9 \\ 3 & -2 & 1 & \vdots & 20a \\ 1 & 1 & a+1 & \vdots & 9 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\substack{E_2=E_2-3E_1 \\ E_3=E_3-E_1}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2a & \vdots & 9 \\ 0 & -5 & 1-6a & \vdots & 20a-27 \\ 0 & 0 & 1-a & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$1-a=0; \quad a=1$$

Discusión:

1. Si $a \neq 1$. Sistema compatible determinado.
2. Si $a=1$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 0 & -5 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$. Sistema compatible indeterminado.

b) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

Solución.

Dependiendo del método aplicando en el apartado a

I. Por Rangos de matrices.

$$S' : \left\{ \begin{matrix} x+y+2z=9 \\ 3x-2y+z=20 \end{matrix} \right\} : \underset{z=\lambda}{\overset{z=cte}{\rightarrow}} \begin{cases} x+y=9-2\lambda \\ 3x-2y=20-\lambda \end{cases}$$

Aplicando el método de Cramer, se calculan x e y en función de λ:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9-2\lambda & 1 \\ 20-\lambda & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-18+4\lambda-(20-\lambda)}{-5} = \frac{-38+5\lambda}{-5} = \frac{38}{5}-\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9-2\lambda \\ 3 & 20-\lambda \end{vmatrix}}{-5} = \frac{20-\lambda-(27-6\lambda)}{-5} = \frac{-7+5\lambda}{-5} = \frac{7}{5}-\lambda$$

$$\text{SOLUCIÓN}: \left(\frac{38}{5}-\lambda, \frac{7}{5}-\lambda, \lambda \right) \quad \forall \lambda \in R$$

II. Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 0 & -5 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 5+5=7 \end{cases} ; \underset{z=\lambda}{\overset{c=cte}{\rightarrow}} \begin{cases} x+y=9-2\lambda \\ 5y=7-5\lambda \end{cases}$$

De la 2ª ecuación se despeja y;

$$y = \frac{7}{5}-\lambda$$

y se sustituye en la 1ª ecuación para despejar x.

$$x+\frac{7}{5}-\lambda=9-2\lambda\ ;\ x=\frac{38}{5}-\lambda$$

$$\text{SOLUCIÓN}:\left(\frac{38}{5}-\lambda,\frac{7}{5}-\lambda,\lambda\right)\quad\forall\lambda\in R$$

c) Resolver el sistema para a = 2.

Solución.

Dependiendo del método empleado en a:

I. Por Rangos de matrices.

a = 2. Sistema compatible determinado, la solución se obtiene por el método de Cramer.

$$a=2:\begin{cases}x+y+3z=9\\3x-2y+z=40\\x+y+4z=9\end{cases}\qquad |A|=-5\cdot 2+5=-5$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}9&1&3\\40&-2&1\\9&1&4\end{vmatrix}}{-5}=\frac{58}{5};\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&9&3\\3&40&1\\1&9&4\end{vmatrix}}{-5}=\frac{-13}{5};\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&9\\3&-2&40\\1&1&9\end{vmatrix}}{-5}=0$$

$$\text{SOLUCIÓN}:\left(\frac{58}{5},\frac{-13}{5},0\right)$$

II. Gauss:

Para a = 2, se sustituye en el sistema triangula rizado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&9\\0&-5&-11&13\\0&0&-1&0\end{array}\right):\quad\left.\begin{array}{r}x+y+4z=9\\-5y-11z=13\\-z=0\end{array}\right\}:z=0$$

Resolviendo por sustitución

$$\left.\begin{array}{r}x+y=9\\-5y=13\end{array}\right\}:y=-\frac{13}{5}\quad;\quad x=\frac{58}{5}$$

$$\text{SOLUCIÓN}:\left(\frac{58}{5},\frac{-13}{5},0\right)$$

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función

$$f(x)=x^3+5x^2+2x-8$$

y el eje OX

Solución.

Para poder calcular el área entre la función y el eje OX es conveniente hacer un estudio previo de la función.

Por ser una función polinómica, es continua en todo R. Los puntos de corte con el eje OX se obtiene calculando los ceros de la función:

$$x^3+5x^2+2x-8=0$$

Mediante el método de Ruffini se obtienen las soluciones y se factoriza la función.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 5 & 2 & -8\\
1 & & 1 & 6 & 8\\
\hline
 & 1 & 6 & 8 & 0\\
-2 & & -2 & -8 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 0 & \\
-4 & & -4 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}\qquad\begin{array}{l}x=1\\ \\x=-2\\ \\x=-4\end{array}$$

$$f(x)=(x+4)\cdot(x+2)\cdot(x-1)$$

El estudio del signo de la función es:

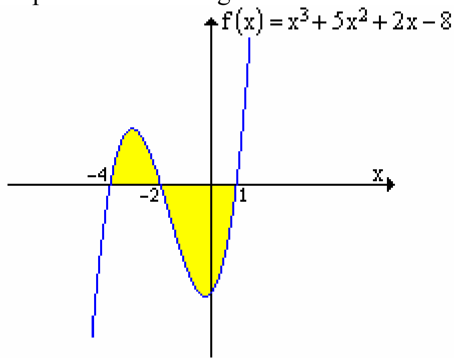
$(-\infty,-4)$		$(-4,-2)$		$(-2,1)$		$(1,+\infty)$
$f(x)<0$	-4	$f(x)>0$	-2	$f(x)<0$	1	$f(x)>0$

Nota: Basta sustituir un valor de cada intervalo en la función factorizada para saber el signo de la misma.

Por último es conveniente calcular los límites de la función en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Con los datos obtenidos se puede esbozar la gráfica de la función.



El área pedida es la zona rayada, que se debe dividir en dos áreas por ser una positiva y otra negativa.

$$A=\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\left|\int_{-2}^{1} f(x)dx\right|$$

$$A=\int_{-4}^{-2}\left(x^3+5x^2+2x-8\right)dx+\left|\int_{-2}^{1}\left(x^3+5x^2+2x-8\right)dx\right|=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-8x\right)_{-4}^{-2}+\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-8x\right)_{-2}^{1}\right|=$$

$$=\left(\frac{(-2)^4}{4}+\frac{5\cdot(-2)^3}{3}+(-2)^2-8\cdot(-2)\right)-\left(\frac{(-4)^4}{4}+\frac{5\cdot(-4)}{3}+(-4)^2-8\cdot(-4)\right)+$$

$$+\left|\left(\frac{1^4}{4}+\frac{5\cdot1^3}{3}+1^2-8\cdot1\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}+\frac{5\cdot(-2)^3}{3}+(-2)^2-8\cdot(-2)\right)\right|=\frac{32}{3}-\frac{16}{3}+\left|\frac{-61}{12}-\frac{32}{3}\right|=\frac{16}{3}+\left|\frac{-63}{4}\right|=\frac{253}{12}$$

3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos *A* y *B:*

$$P(A)=0{,}6 \qquad P(B)=0{,}2 \qquad P(A\cap B)=0{,}12$$

a) Calcular las probabilidades de los sucesos

$$(A\cup B) \quad y \quad (A/(A\cup B))$$

Solución.

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0'6+0'2-0'12=0'68$$

Teniendo en cuenta la propiedad simplificativa de la intersección respecto a la unión.

$$A\cap(B\cup A)=A$$

$$p(A/A\cup B)=\frac{p(A\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)}=\frac{p(A)}{p(A\cup B)}=\frac{0'6}{0'68}=0'088$$

b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

Solución.

Son **compatibles** porque $p(A\cap B)\neq 0$. Se definen como compatibles aquellos sucesos de un mismo espacio probabilístico que pueden realizarse a la vez

Son **independientes** por que $p(A)\cdot p(B)=p(A\cap B)$

4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El tiempo diario de conexión a Internet de los clientes de un cibercafé tiene una distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 horas. Una muestra de 40 clientes ha dado como resultado una media de tiempo de conexión de 2,85 horas. Se pide:

a) Determinar un intervalo de confianza al 95% para μ

Solución.

$x \equiv$ tiempo diario de conexión a internet. Variable continua con distribución normal

$$x : N(\mu, 1'2)$$

Para muestras de tamaño n = 40, las medias de las muestras siguen también una distribución normal, cuyos parámetros son.

$$\bar{x} : N\left(\mu \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{1'2}{\sqrt{40}}\right)$$

Se pide obtener un intervalo de confianza al 95% para la media (μ) a partir de la media de una muestra $(\bar{x}_0 = 2'85\text{h})$

$$\left(\bar{x}_0 - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_0 + Z_{\alpha/2}\right)$$

$$\bar{x}_0 = 2'85;\quad Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \left\{\begin{matrix} 1-\alpha = 0'95 \\ \alpha = 0'05 \end{matrix}\right\} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96; \sigma = 1'2; n = 40.$$

$$\left(2'85 - 1'96 \cdot \frac{1'2}{\sqrt{40}}, 2'85 + 1'96 \cdot \frac{1'2}{\sqrt{40}}\right) = (2'49, 3'22)$$

Con una probabilidad del 95% se puede asegurar que la media poblacional va a estar comprendida entre 2'49 y 3'22 hora.

b) Calcular el tamaño mínimo que debería tener la muestra para estimar la media de tiempo diario de conexión a Internet de los clientes de ese cibercafé, con un error menor o igual que 0,25 horas y una probabilidad de 0,95.

Solución.

El tamaño poblacional se relaciona con el máximo error admitido por:

$$\varepsilon_{\text{máx}} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2$$

$$n > \left(1'96 \cdot \frac{1'2}{0'25}\right)^2 = 88'5$$

$$n \geq 89$$

OPCIÓN B

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un taller dedicado a la confección de prendas de punto fabrica dos tipos de prendas: A y B. Para la confección de la prenda de tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de máquina. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquina. El taller dispone al mes como máximo de 85 horas para él trabajo manual y de 75 horas para el trabajo de máquina y debe confeccionar al menos 100 prendas. Si los beneficios son de 20 euros por cada prenda de tipo A y de 17 euros por cada prenda de tipo B, ¿cuántas prendas de cada tipo debe fabricar al mes, para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

Solución.

Variables:

X ≡ nº de prendas tipo A

Y ≡ nº de prendas tipo B

DATOS:

	Trabajo Manual	Trabajo Maquina	Beneficio
Tipo A	30	45	20
Tipo B	60	20	17
Valor máximo	85×60	75×60	

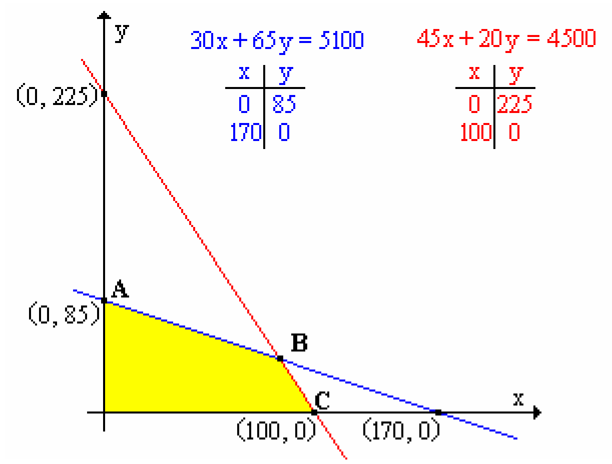
Función objetivo: Máximo beneficio.

$$F(x, y) = 20x + 17y$$

Restricciones:

$$x \geq 0;\ \ y \geq 0$$
$$30x + 60y \leq 5100$$
$$45x - 20y \leq 4500$$

Región factible:



Sustituyendo (0, 0) en las dos inecuaciones se observa que ambas se cumplen, por lo tanto la región factible es la que muestra la figura.

Vértices:

Descarta el punto A por no tener sentido social.

$$A = (0,85);\ \ B = \begin{cases} 30x + 60y = 5100 \\ 45x + 20y = 4500 \end{cases} :\ B = (80,45);\ \ C = (100,0)$$

Optimación:

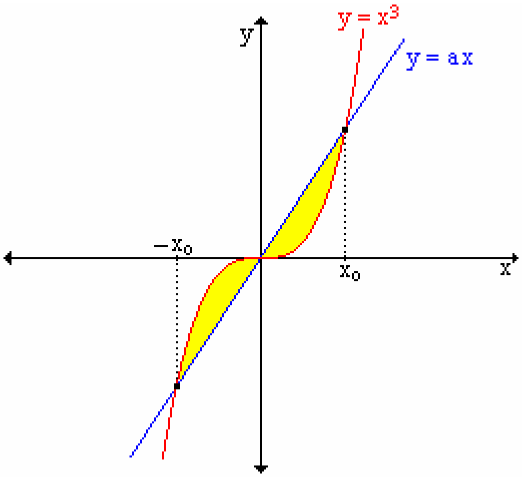
	X	Y	$F(x, y) = 20x + 17y$
A	0	85	1445€
B	80	45	2365€
C	100	0	2000€

Se obtiene un beneficio máximo de 2365 €, cumpliendo las restricciones propuestas, fabricando 80 prendas tipo A y 45 prendas tipo B.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcular el valor de $a > 0$ para que el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las curvas $y = x^3$, $y = ax$, sea igual a 4.

Solución.



El área comprendida entre las dos funciones tiene dos regiones simétricas e iguales, lo cual nos permite simplificar el cálculo del área.

$$A = \int_{-x_0}^{0} \left(x^3 - ax\right)dx + \int_0^{x_0} \left(ax - x^3\right)dx = 2 \cdot \int^{x_0} \left(ax - x^3\right)dx = 4$$

Operando:

$$\int_0^{x_0} \left(ax - x^3\right)dx = 2$$

$$\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)_0^{x_0} = 2; \quad \left(\frac{ax_0^2}{2} - \frac{x_0^4}{4}\right) - (0) = 2$$

$$\frac{ax_0^2}{2} - \frac{x_0^4}{4} = 2$$

x_0 se puede expresar en función de a ya que comprende al punto de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = ax \end{array}\right\} : ax_0 = x_0^3 : ax_0 - x_0^3 = 0$$

$$x_0 \cdot \left(a - x_0^2\right) = 0 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm\sqrt{a} \end{cases}$$

Tomando el valor positivo para x_0.

$$\frac{a \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^4}{4} = 2 \; ; \quad \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 2$$

$$\frac{a^2}{4} = 2 : \; a^2 = 8 : \; a = \sqrt{8}$$

3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene dos bolas. La urna sé llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

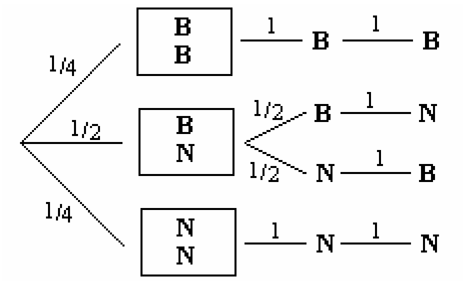
Solución.

El ejercicio se puede representar con tres urnas con diferente relación de bolas y con diferente probabilidad de ser escogida.

- Dos bolas blancas: $p(c) \cdot p(c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Blanca/ Negra: $p(c) \cdot p(x) + p(x) \cdot p(c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- Dos bolas negras: $p(x)\cdot p(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Diagrama en árbol:



Sucesos: $A \equiv$ La segunda bola es blanca. $B \equiv$ La primera bola extraída es blanca

$$p\left(A/B\right)=\frac{p(B\cap A)}{p(B)}=\frac{p(B\cap A)}{p\left[(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})\right]}=\frac{\frac{1}{4}\cdot1\cdot1}{\frac{1}{4}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1}=\frac{1}{2}$$

4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Un fabricante de automóviles afirma que los coches de un cierto modelo tienen un consumo por cada 100 kilómetros que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 0,68 litros. Se observa una muestra aleatoria simple de 20 coches del citado modelo y se obtiene una media de consumo de 6,8 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95% para la media de consumo de ese modelo de vehículos.

Solución.

$X \equiv$ Consumo de combustible por cada 100Km. Variable continua que sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$, siendo la desviación típica (σ) 0'68 litros.

Si se toman muestras de 20 coches, y de cada muestra se obtiene la media, se genera una distribución de medias muestrales que también se ajustan a una Normal $N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$\overline{X}:N\left(\mu,\frac{0'68}{\sqrt{20}}\right)$$

Se pide determinar un intervalo de confianza para la media población (σ) a partir de una muestral $(\overline{X}_o)$ obtenida.

$$\left(\overline{X}_o-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}_o+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$\overline{X}_o=6'8\text{litros}$

$Z_{\alpha/2}=\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\left\{\begin{matrix}1-\alpha=0'95\\ \alpha=0'05\end{matrix}\right\}=\phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right)=\phi^{-1}(0'9750)=1'96$

$\sigma=0'68$

$n=20$

$$\left(6'8-1'96\cdot\frac{0'68}{\sqrt{20}},6'8+1'96\cdot\frac{0'68}{\sqrt{20}}\right)=(6'5,7'1)$$

Con una confianza del 95% se puede asegurar que la media poblacional de consumo para 20 coches va ha estar comprendida entre 6'5 y 7'1 litros.