

Modelo 2007

**INSTRUCCIONES:** El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad gráfica o de cálculo simbólico.

**TIEMPO MÁXIMO:** Una hora y media.

**CALIFICACIÓN:** Cada ejercicio lleva indicada su puntuación máxima.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una papelería quiere liquidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A Y B. Los lotes A están formados por 1 kg del papel reciclado y 3 kg de papel normal y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0,9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿Cuántos lotes A Y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?

**Solución.**

**Datos.**

	Reciclado (kg)	Normal (kg)	Precio (€)
<b>Tipo A</b>	1	3	0,9
<b>Tipo B</b>	2	2	1
<b>Máximos operativos (kg)</b>	78	138	

**Variables.**

- $x \equiv$  Número de lotes tipo A
- $y \equiv$  Número de lotes tipo B

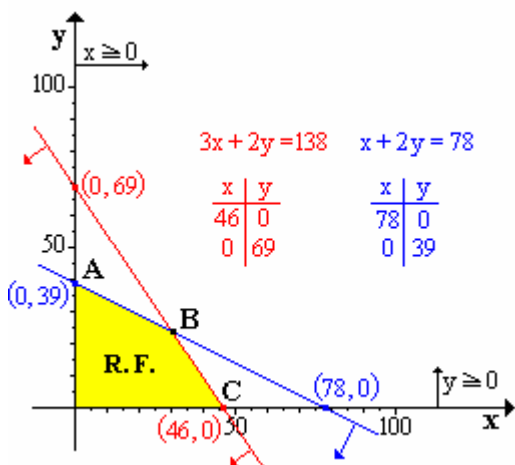
**Restricciones.**

$$\begin{cases} x + 2y \leq 78 \\ 3x + 2y \leq 138 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

**Función objetivo.**

$$I(x, y) = 0,9x + y$$

**Región factible.**



Para seleccionar la región factible se toma como punto de prueba el (0, 0).

$$\begin{cases} 0 + 2 \cdot 0 \leq 78 \Rightarrow \text{Se Cumple} \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 138 \Rightarrow \text{Se Cumple} \end{cases}$$

**Vértices de la región factible**

$$\begin{cases} A = (0, 39) \\ B : \begin{cases} 3x + 2y = 138 \\ x + 2y = 78 \end{cases} : B = (30, 24) \\ C = (46, 0) \end{cases}$$

Optimación

	x	y	I(x, y) = 0'9 + y
<b>A</b>	0	39	39
<b>B</b>	<b>30</b>	<b>24</b>	<b>51</b>
<b>C</b>	46	0	41'4

Se obtiene un **beneficio máximo de 51 €** cumpliendo las restricciones propuestas cuando se preparan **30 lotes tipo A y 24 lotes tipo B**

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

Se pide:

- a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.

**Solución.**

Para que una función alcance un extremo relativo en un punto  $(x_0)$  debe cumplir las siguientes condiciones:

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) \neq 0$

Criterio para discernir los extremos relativos.

- Si  $f''(x_0) > 0$ , en  $(x_0, f(x_0))$  existe un **mínimo** relativo.
- Si  $f''(x_0) < 0$ , en  $(x_0, f(x_0))$  existe un **máximo** relativo.

$$f(x) = x^3 - 9x \quad f'(x) = 3x^2 - 9 \quad f''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0: 3x^2 - 9 = 0: \begin{cases} x = -\sqrt{3}: f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} \Rightarrow (-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) \text{ Máximo} \\ x = +\sqrt{3}: f''(+\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) \text{ Mínimo} \end{cases}$$

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \cdot (-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$$

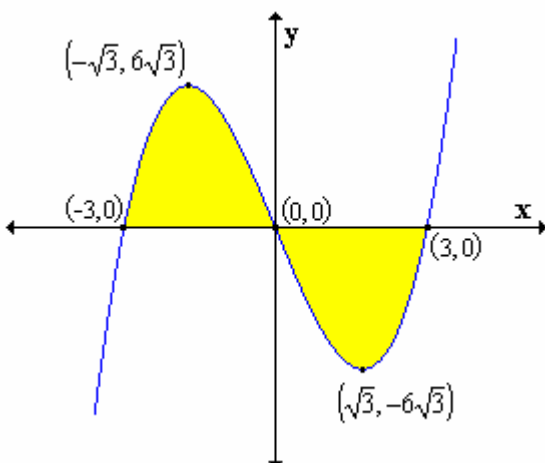
$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9 \cdot (\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$$

$$(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}) \text{ Máximo} \quad (\sqrt{3}, -6\sqrt{3}) \text{ Mínimo}$$

- b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función  $f$  y el eje OX.

**Solución.**

Para hacer este apartado es conveniente esbozar la gráfica de la función.



- Función impar:  $f(-x) = -f(x)$ . Simétrica respecto  $(0, 0)$ .

- Punto de corte con los ejes:

$$\text{OX: } y = 0: x^3 - 9x = 0: x \cdot (x^2 - 9) = 0: \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

$(-3, 0), (0, 0), (3, 0)$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 9x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 9x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx + \left| \int_0^3 (x^3 - 9x) dx \right| \stackrel{\text{SIMETRIA}}{=} 2 \cdot \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx = 2 \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} \right]_{-3}^0 = \\ &= 2 \left[ \left( \frac{0^4}{4} - \frac{9 \cdot 0^2}{2} \right) - \left( \frac{(-3)^4}{4} - \frac{9 \cdot (-3)^2}{2} \right) \right] = 2 \left[ 0 - \left( \frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) \right] = \frac{81}{2} u^2 \end{aligned}$$

**Ejercicio 3. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es  $\frac{2}{3}$ . El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0,25.

Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

**Solución.**

Sucesos:

A ≡ Regar el jardín.      B ≡ El jardín progresa

Datos:

- $p(\bar{A}) = \frac{2}{3} \Rightarrow p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- $p\left(\frac{B}{A}\right) = p\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) = 0,5$  Sucesos complementarios
- $p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = \frac{1}{4}$

Se pide:  $p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)$

Aplicando el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) &= \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B))} = \frac{p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right)}{p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) + p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right)} = \\ &= \frac{p(\bar{A}) \cdot \left(1 - p\left(\frac{B}{A}\right)\right)}{p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) + p(\bar{A}) \cdot \left(1 - p\left(\frac{B}{A}\right)\right)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Por cuadro de contingencia: Base de calculo = 60 (La elección de 60 es por simplificar los cálculos y evitar números decimales)

	Regar	No regar	
Progresar	10	10	20
No progresar	10	30	40
	20	40	60

$$p\left(\frac{\text{No regar}}{\text{No progresar}}\right) = \frac{p(\text{No regar} \cap \text{No progresar})}{p(\text{No progresar})} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

En cierta población humana, la media muestral  $\bar{x}$  de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que  $\bar{x}$  sea menor o igual que 75 es 0,58 y la de que  $\bar{x}$  sea mayor que 80 es 0,04.

Hallar la media y la desviación típica de  $x$ . (Tamaño muestral  $n = 100$ ).

**Solución.**

Se pide calcular la media y la desviación de una variable de la que se conocen dos datos de probabilidad de la media de 100 muestras.

$$x : N(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=100} \bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right) = N\left(\mu, \frac{\sigma}{10}\right)$$

Tipificación:  $\bar{x} \rightarrow z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/10}$

- $p(\bar{x} \leq 75) = 0'58 \xrightarrow{\text{TIPIFICANDO}} p\left(z \leq \frac{75 - \mu}{\sigma/10}\right) = 0'58 \Rightarrow \Phi\left(\frac{75 - \mu}{\sigma/10}\right) = 0'58$

invirtiendo se obtiene una ecuación con dos incógnitas

$$\frac{75 - \mu}{\sigma/10} = \Phi^{-1}(0'58) = 0'2 : \text{ordenando} : 0'2\sigma + 10\mu = 750$$

- $p(\bar{x} > 80) = 0'04 : p(\bar{x} \leq 80) = 1 - 0'04 = 0'96 \xrightarrow{\text{TIPIFICANDO}} p\left(z \leq \frac{80 - \mu}{\sigma/10}\right) = 0'96 \Rightarrow \Phi\left(\frac{80 - \mu}{\sigma/10}\right) = 0'96$

invirtiendo se obtiene una segunda ecuación con dos incógnitas

$$\frac{80 - \mu}{\sigma/10} = \Phi^{-1}(0'96) = 1'75 : \text{ordenando} : 1'75\sigma + 10\mu = 800$$

Con las dos ecuaciones se plantea un sistema que permite calcular la media y la desviación.

$$\begin{cases} 0'2\sigma + 10\mu = 750 \\ 1'75\sigma + 10\mu = 800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = 32'2 \\ \mu = 74'3 \end{cases}$$

**OPCIÓN B**

**Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)**

Encontrar todas las matrices X cuadradas 2x2 que satisfacen la igualdad  

$$X A = A X$$

en cada uno de los dos casos siguientes:

a) 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Solución.**

Sea X una matriz genérica de 2x2

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & 3y \\ z & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 3z & 3t \end{pmatrix}$$

Identificando:

$$\left. \begin{array}{l} 1.1 : x = x \\ 2.1 : 3y = y \\ 1.2 : z = 3z \\ 2.2 : 3t = 3t \end{array} \right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solución.**

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3y & x \\ 3t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 3x & 3y \end{pmatrix}$$

Identificando:

$$\left. \begin{array}{l} 1.1 : 3y = z \\ 2.1 : x = t \\ 1.2 : 3t = 3x \\ 2.2 : z = 3y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \lambda \\ 3y = z \\ x = t \end{array} \xrightarrow{y = \mu} \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3\mu \\ t = \lambda \end{array} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 3\mu & \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

**Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)**

Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2 + 8x$$

Se pide:

- a) Calcular las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta  $y = 2x$

**Solución.**

Si dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales. Por definición, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Sea  $x_0$  la coordenada del punto donde la tangente es paralela a la recta  $y = 2x$  (pendiente  $m = 2$ ), se debe cumplir:

$$f'(x_0) = 2$$

$$f'(x) = 2x + 8 ; f'(x_0) = 2x_0 + 8 = 2 ; x_0 = -3 ; y_0 = (-3)^2 + 8 \cdot (-3) = -15$$

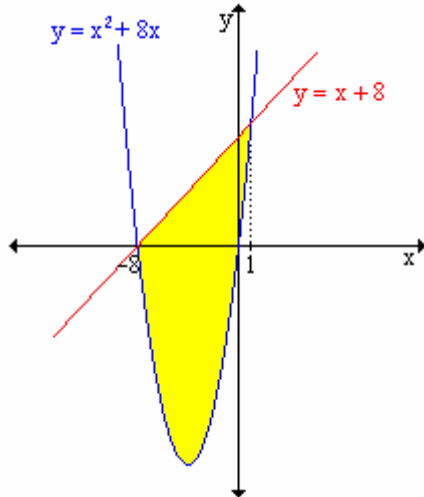
La curva  $y = x^2 + 8x$  tiene una tangente paralela a  $y = 2x$  en el punto  $(-3, -15)$ .

- b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana.

$$y = x + 8$$

**Solución.**

Para calcular el área limitada por una parábola ( $y = x^2 + 8x$ ) y una recta ( $y = x + 8$ ), es conveniente esbozar las gráficas de las funciones.



Limites de integración:

$$\begin{cases} y = x^2 + 8x \\ y = x + 8 \end{cases} : x^2 + 8x = x + 8 : x^2 + 7x - 8 = 0 : \begin{cases} x = -8 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-8}^1 (x + 8 - (x^2 + 8x)) dx = \int_{-8}^1 (-x^2 - 7x + 8) dx = \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 8x \right]_{-8}^1 = \\ &= \left( -\frac{1^3}{3} - \frac{7 \cdot 1^2}{2} + 8 \cdot 1 \right) - \left( -\frac{(-8)^3}{3} - \frac{7 \cdot (-8)^2}{2} + 8 \cdot (-8) \right) = \\ &= \frac{243}{2} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

**Ejercicio 3. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide:

- a) Describir el espacio muestral de este experimento.

**Solución.**

Sea c obtener cara en la moneda y x obtener cruz:

$$E = \left\{ \begin{matrix} c-1 & c-2 & c-3 & c-4 & c-5 & c-6 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x-4 & x-5 & x-6 \end{matrix} \right\}$$

- b) Determinar la probabilidad del suceso: Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.

**Solución.**

A  $\equiv$  Obtener cara

B  $\equiv$  Obtener par

Se pide:  $p(A \cap B) \stackrel{\text{INDEPENDIENTES}}{=} p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Otra forma de hacerlo es por la definición axiomática de probabilidad:

$$p = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima.: 2 puntos)

El tiempo de espera en minutos en una ventanilla se supone aproximado mediante una distribución  $N(\mu, \sigma)$  con  $\sigma$  igual a 3 minutos. Se lleva a cabo un muestreo aleatorio simple de 10 individuos y se obtiene que la media muestral del tiempo de espera es de 5 minutos. Determinar un intervalo de confianza al 95% para  $\mu$ .

**Solución.**

$x \equiv$  tiempo de espera, variable continua que sigue una distribución normal  $N(\mu, \sigma)$ .  $\sigma = 3$  min.

Para muestras de tamaño 10, las medias de las muestras también siguen una distribución normal

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$$

Se pide estimar al 95% de confianza un intervalo para la media poblacional ( $\mu$ ) a partir de una media muestral ( $\bar{x}_0 = 5$  min).

$$\left( \bar{x}_0 - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_0 + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Para un nivel de confianza del 95%, el Z crítico se calcula de la siguiente forma:

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \phi^{-1}(0.9750) = 1.96$$

Sustituyendo en el intervalo los datos del enunciado y el valor del Z crítico:

$$\left( 5 - 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}, 5 + 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = (3.14, 6.86)$$