

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE
MADRID PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS
UNIVERSITARIOS (LOE)

CURSO 2009-10

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
EXAMEN MODELO

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ 2y + kz = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- Discútase el sistema para los diferentes valores de k .
- Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
- Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Solución.

a. Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que viene descrito por las matrices de coeficientes (A) y ampliada (A^*).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \leq \text{rg } A^* \leq 3. \quad n = 3$$

La discusión del tipo de solución en función del parámetro se puede hacer de dos formas:

- Por el teorema de Rouché
- Por Gauss.

Por el teorema de Rouché-Frobenius. Si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, el rango de la matriz A es tres, el de la ampliada también ($A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \leq \text{rg } A^*$) y coincide con el número de incógnitas, sistema compatible determinado. Por lo tanto se discute el sistema para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

Por Gauss. Por ser un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas, si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero el sistema es compatible determinado. Por lo tanto se discute el sistema para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + k^2 + 0 - (2 + k + 0) = k^2 - k = k(k - 1)$$

$$|A| = 0 : k(k - 1) = 0 : \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

Discusión: (Rouché-Fröbenius)

- i. Si $k \neq 0, 1$, $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3$. Sistema compatible determinado (solución única). Se puede calcular mediante el método de Cramer.
- ii. Si $k = 0$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3$. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$.
- $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{rg } A^* \geq 2$ (A^* no puede tener menor rango que A). Si se toma como referencia el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, de sus menores orlados, solo que queda por estudiar el formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna, el otro es el determinante de la matriz de coeficientes que para $a = 0$ es nulo. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A$. Sistema incompatible (no tiene solución).
- iii. Si $k = 1$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3$. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\text{rg } A^* \geq 2$ (A^* no puede tener menor rango que A). Si se toma como referencia el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, de sus menores orlados, solo que queda por estudiar el formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna, el otro es el determinante de la matriz de coeficientes que para $a = 0$ es nulo.
- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < n = 3$. Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Discusión: (Gauss)

- i. Si $a \neq 0, 1$, $|A| \neq 0$. Sistema compatible determinado (solución única). Se puede calcular mediante el método de Cramer.
- ii. Si $k = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} E_3 = E_3 - E_1 \\ E_2 = E_2/2 \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} x+z=1 \\ y=1 \\ y=0 \end{cases}$ Sistema incompatible (no tiene solución). Se produce una incongruencia entre la 2ª y 3ª ecuación.
- iii. Si $a = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} = \{E_3 = E_3 - E_1\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b. El sistema tiene infinitas soluciones para $k = 1$. Dos métodos, Cramer ó Gauss.

Cramer: $k = 1$. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{EQUIV}} \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \end{cases}$ Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

Para resolverlo se transforma una variable en parámetro ($z = \lambda$) y se resuelven las otras dos en función del parámetro (λ) mediante cualquier método (Cramer)

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x+y=1-\lambda \\ 2y=2-\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-\lambda}{2}; y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}}{2} = \frac{2-\lambda}{2} = 1 - \frac{\lambda}{2}$$

Solución: $\left(-\frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$

Gauss: $k=1$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x+y=1-\lambda \\ 2y=2-\lambda \end{cases} : y = \frac{2-\lambda}{2} = 1 - \frac{\lambda}{2}$

$$\begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{2} + y = 1 - \lambda : y = -\frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

Solución: $\left(-\frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$

c. Para $k=3$. Sistema compatible determinado, solución única. Dos métodos, Cramer ó Gauss.

Cramer: $k=3$. $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \quad x = \frac{|A_x|}{|A|}; y = \frac{|A_y|}{|A|}; z = \frac{|A_z|}{|A|} \quad |A| = 3^2 - 3 = 6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Solución: $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

Gauss: $k=3$. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} = \{E_3 = E_3 - E_1\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ -2y=0 \end{cases} : y=0$

$$\begin{cases} x+z=1 \\ 3z=2 \end{cases} : z = \frac{2}{3} : \begin{cases} x + \frac{2}{3} = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Solución: $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2$$

- a) Calcúlese las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva propuesta es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
- b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva propuesta, la recta tangente a dicha curva en el punto P(1, 1) y el eje OX.

Solución.

a. Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la derivada en un punto, “la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto”, para calcular la abscisa (x) del punto donde la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante ($y = x$), se iguala la derivada de la función a la pendiente de la bisectriz ($m = 1$).

La bisectriz del primer cuadrante tiene por ecuación explícita $y = x$, comparando con la expresión teórica ($y = mx + n$; $m \equiv$ pendiente (1), $n \equiv$ ordenada en el origen (0)) se halla el valor de la pendiente.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x \\ m = 1 \end{array} \right\} : f'(x) = m : 2x = 1 : x = \frac{1}{2}$$

Para calcular la ordenada (y) del punto de tangencia, se sustituyen el valor de x calculado en la expresión de la función.

$$y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

El punto donde la función $f(x) = x^2$ tiene una recta tangente a la bisectriz del primer cuadrante es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

b. Para calcular el área, necesitamos calcular la ecuación de la recta tangente a la función en el punto P.

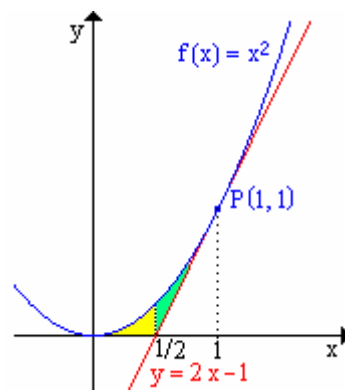
Ecuación de la recta tangente en el punto P(1, 1) en forma punto-pendiente.

$$\begin{aligned} y - 1 &= f'(1) \cdot (x - 1) \\ f'(1) &= 2 \cdot 1 = 2 \\ y - 1 &= 2 \cdot (x - 1) \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

Para hacer el cálculo del área recomiendo que esbocéis las gráficas de las funciones para poder delimitar el área.

El área pedida consta de dos regiones, la 1ª comprendida entre la función $f(x) = x^2$ y el eje OX en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la 2ª

comprendida en la función $f(x) = x^2$ y su tangente en P ($y = 2x - 1$) en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{1/2} x^2 dx + \int_{1/2}^1 (x^2 - (2x - 1)) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} + \left[\frac{x^3}{3} - \left(\frac{2x^2}{2} - x \right) \right]_{1/2}^1 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{1/2}^1 = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right) - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{24} - 0 + \frac{1}{3} - \frac{7}{24} = \frac{1}{12} u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Según cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33% tiene contratada la televisión por cable, y el 20% dispone de ambos servicios. Se selecciona al azar un hogar europeo.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución.

A ≡ Tiene acceso a Internet.
 B ≡ Tiene televisión por cable.

Datos:

$$p(A) = 0'40 ; p(B) = 0'33 ; p(A \cap B) = 0'20$$

- a) Solo televisión por cable ≡ No tiene acceso a Internet Y tiene TV por cable.

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = 0'33 - 0'20 = 0'13$$

- b) No tiene acceso a Internet Y no tiene TV por cable.

$$\begin{aligned} p(\overline{A} \cap \overline{B}) &=_{\text{MORGAN}} p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = \\ &= 1 - [0'40 + 0'33 - 0'20] = 0'57 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que la duración de una bombilla fabricada por una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 900 horas y desviación típica 80 horas. La empresa vende 1000 lotes de 100 bombillas cada uno. ¿En cuantos lotes puede esperarse que la duración media de las bombillas que componen el lote sobrepase 910 horas?

Solución.

x ≡ Duración de una bombilla. Variable continua con distribución Normal N(μ, σ).
 $x : N(900, 80)$

Si se hacen lotes de 100 bombillas, la duración media de las bombillas del lote también sigue una distribución Normal.

$$\begin{aligned} x : N(\mu, \sigma) &\xrightarrow{\text{Tamaño } n} \bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ x : N(900, 80) &\xrightarrow{n=100} \bar{x} : N\left(900, \frac{80}{\sqrt{100}}\right) = N_{\bar{x}}(900, 8) \end{aligned}$$

Para calcular el número de lotes cuya vida media de las bombillas es superior a 910 horas, hay que calcular la probabilidad de que un lote tenga una vida media superior a 910 horas y multiplicar la probabilidad de un lote por el número de lotes (1000).

Probabilidad de que un lote tenga una vida media superior a 910 horas:

$$\begin{aligned} p(\bar{x} > 910) &=_{N_{\bar{x}}(910, 8)} \left\{ z = \frac{\bar{x} - 910}{8} = 1,25 \right\} p(z > 1,25) = p(\overline{z \leq 1,25}) = 1 - p(z \leq 1,25) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila : 1,2} \\ \text{Columna : 0,05} \end{array} \right\} = 1 - 0,8944 = 0,1056 \end{aligned}$$

$$N^{\circ} \text{ de Lotes} = 1000 \cdot p(\bar{x} > 910) = 1000 \cdot 0,1056 = 105,6 \approx 107 \text{ lotes}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio. El beneficio que obtiene la empresa por cada 100 metros de cable de tipo A fabricado es igual a 1500 euros, y por cada 100 metros de cable de tipo B es igual 1000 euros. Calcúlense los metros de cable de cada tipo que han de fabricarse para maximizar el beneficio de la empresa y determinese dicho beneficio máximo.

Solución.

Variables:

- x ≡ Número de centenas de metro de cable tipo A
- y ≡ Número de centenas de metro de cable tipo B

Datos: Para 100 metros de cada tipo de cable

	COBRE	TITANIO	ALUMINIO	BENEFICIO
TIPO A	10	2	1	1500
TIPO B	15	1	1	1000
MÁXIMOS OPERATIVOS	195 kg	20 kg	14 kg	

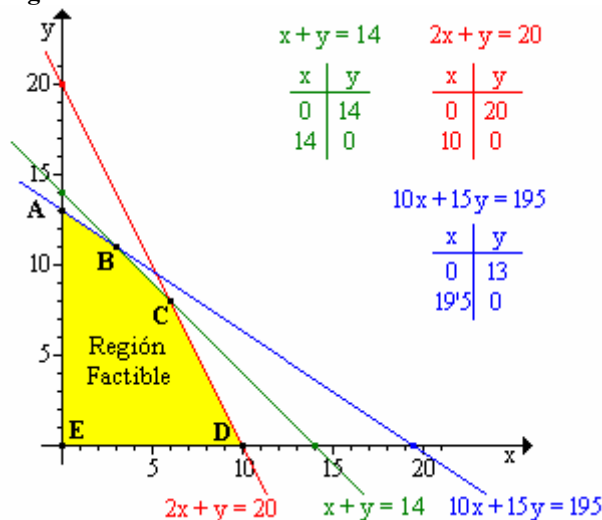
Función objetivo:

$$F(x, y) = 1500x + 1000y$$

Restricciones:

- $10x + 15y \leq 195$
- $2x + y \leq 20$
- $x + y \leq 14$
- $x \geq 0; y \geq 0$

Región factible:



Las restricciones $x \geq 0, y \geq 0$, sitúan la región factible en el primer cuadrante. Si se toma $(0, 0)$ como referencia, las tres inecuaciones restantes se cumplen

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 \cdot 0 + 15 \cdot 0 \leq 195 \\ 2 \cdot 0 + 0 \leq 20 \\ 0 + 0 \leq 14 \end{array} \right\}, \text{ por lo que la región}$$

factible queda delimitada por los vértices A, B, C, D y E de la figura.

Vértices:

- A = (0, 13)
- B: $\begin{cases} 10x + 15y = 195 \\ x + y = 14 \end{cases}$ Solución: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow B = (3, 11)$
- C: $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + y = 14 \end{cases}$ Solución: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow C = (6, 8)$
- D = (10, 0)
- E = (0, 0)

Optimación:

Vértice	x	y	F(x, y) = 1500x + 1000y
A	0	13	13 000
B	3	11	15 500
C	6	8	17 000
D	10	0	15 000
E	0	0	0

El máximo beneficio cumpliendo las restricciones propuestas es de 17000 €, obteniéndose con una producción de 600 m de cable tipo A y 800 m de cable tipo B

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

- a) ¿Qué valores deben tomar a, b y c para que la gráfica de f pase por el punto O(0, 0) y además tenga un máximo relativo en el punto P(1, 2)?
- b) Para a = 1, b = -2, c = 0, determinense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.
- c) Para a = 1, b = -2, c = 0, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución.

a. Los parámetros a, b y c se obtienen planteando un sistema con las ecuaciones que permiten plantear los datos. Para plantear los datos hace falta la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ y su derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

- Pasa por el punto (0, 0) $\Rightarrow (0, 0) \in y = f(x): f(0) = 0. \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c = 0$
- Máximo en (1, 2): $\begin{cases} (1,2) \in y = f(x): f(1) = 2: \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c = 2 \\ \text{Máximo} \Rightarrow f'(1) = 0: \quad 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \quad \text{Resolviendo:} \quad \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

b. Para a = 1, b = -2, c = 0: $f(x) = x^3 - 2x^2$ En este apartado es conveniente esbozar la gráfica de la función, que por ser polinómica solo requiere los puntos de corte con los ejes, los límites en el infinito y los extremos relativos si los tiene.

- Puntos de corte: - OX (y = 0).

$$x^3 - 2x^2 = 0 : x^2(x - 2) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 : x = 0 : (0, 0) \\ x - 2 = 0 : x = 2 : (2, 0) \end{cases}$$

$$\text{- OY (x = 0). } y = 0^3 - 2 \cdot 0^2 = 0 : (0, 0)$$

Nota: Teniendo en cuenta que la función solo corta una vez al eje OY, si uno de los puntos de corte con el eje OX es el (0, 0), el punto de corte con OY también será (0, 0), pudiéndonos ahorrar el calculo.

c. Para a = 1, b = -2, c = 0: $f(x) = x^3 - 2x^2$ En este apartado es conveniente esbozar la gráfica de la función, que por ser polinómica, solo necesitamos los puntos de corte con los ejes, los límites en el infinito y los extremos relativos si los hubiera.

- Puntos de corte: (0, 0) y (2, 0)

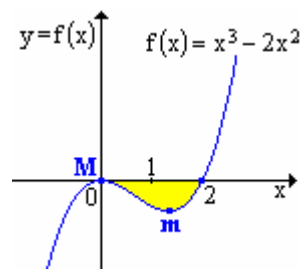
$$\text{- Límites: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2) = -\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2) = +\infty$$

- Máximos y mínimos. $f(x) = x^3 - 2x^2$; $f'(x) = 3x^2 - 4x$; $f''(x) = 6x - 4$

$$f'(x) = 0: 3x^2 - 4x = 0: x(3x - 4) = 0: \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0: x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0: \begin{cases} f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 = 0 \\ f''(0) = 6 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \end{cases} : \text{En } (0, 0) \text{ existe un máximo} \\ x = \frac{4}{3}: \begin{cases} f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27} \\ f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 4 = 4 > 0 \end{cases} : \text{En } \left(\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right) \text{ existe un mínimo} \end{cases}$$

Con lo datos obtenidos esbozamos la gráfica de la función, el área pedida (zona coloreada) es negativa, por lo tanto la integral se hace en valor absoluto.



$$A = \left| \int_0^2 (x^3 - 2x^2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 \right| = \left| \left(\frac{2^4}{4} + \frac{2 \cdot 2^3}{3} \right) - \left(\frac{0^4}{4} + \frac{2 \cdot 0^2}{3} \right) \right| = \left| \frac{-4}{3} \right| = \frac{4}{3} u^2$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

- | | |
|------------------|--------------------------|
| a) $P(A \cup B)$ | e) $P(\overline{A} / B)$ |
| b) $P(A \cap B)$ | d) $P(\overline{B} / A)$ |

Solución.

a. Aplicando las leyes de Morgan a la probabilidad de la intersección de los complementarios se obtiene la probabilidad de la unión.

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) \underset{\text{MORGAN}}{=} p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$$

Despejando

$$p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

b. Conocida la unión, mediante su definición se calcula la intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{19}{20} = \frac{3}{10}$$

c. Los dos últimos sucesos se obtienen aplicando el teorema de Bayes y el suceso diferencia.

$$p(\overline{A} / B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{2}{5}$$

d.
$$p(\overline{B} / A) = \frac{p(\overline{B} \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{5}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima 2 puntos)

La temperatura corporal de una especie de aves se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media 40,5°C y desviación típica de 4,9°C. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 aves de esa especie. Sea \bar{X} la media muestral de las temperaturas observadas.

- a) ¿Cuáles son la media y la varianza de \bar{X} ?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura media de dicha muestra esté comprendida entre 39,9°C y 41,1°C?

Solución.

a. $x \equiv$ Temperatura corporal de una especie de ave. Variable continua con distribución normal $N(\mu, \sigma)$.

$$x : N(40'5, 4'9)$$

Si se toma una muestra de 100 aves, la temperatura corporal media de las aves que forman la muestra también sigue una distribución Normal con igual media y desviación igual a la desviación de la variable dividida por la raíz cuadrada del número de elementos de la muestra.

$$x : N(\mu, \sigma) \xrightarrow{\text{Tamaño } n} \bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$x : N(40'5, 4'9) \xrightarrow{n=100} \bar{x} : N\left(40'5, \frac{4'9}{\sqrt{100}}\right) = N_{\bar{x}}(40'5, 0'49) : \begin{cases} \mu = 40'5 \\ \sigma = 0'49 \end{cases}$$

Conocida la desviación típica (σ), se calcula la varianza (σ^2).

$$\sigma^2 = 0'49^2 = 0'2401$$

b.

$$p(39'9 < \bar{x} < 41'1) \stackrel{=}{N_{\bar{x}}(40'5, 0'49)} \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = 39'9 \rightarrow z = \frac{39'9 - 40'5}{0'49} = -1,22 \\ \bar{x} = 41'1 \rightarrow z = \frac{41'1 - 40'5}{0'49} = +1,22 \end{array} \right\} = p(-1'22 < z < 1'22) =$$

$$= p(z < 1'22) - p(z \leq -1'22) = p(z < 1'22) - p(z \geq 1'22) = p(z < 1'22) - p(\overline{z < 1'22}) =$$

$$= p(z < 1'22) - (1 - p(z < 1'22)) = 2 \cdot p(z < 1'22) - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila : 1'2} \\ \text{Columna : 0,02} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \cdot 0'8888 - 1 = 0,7776$$

$$p(39'9 < \bar{x} < 41'1) = 77'76 \%$$