UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

CURSO 2010-2011

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
EXAMEN MODELO

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.

Solución

Sea **x** el precio de la mochila, **y** el precio del bolígrafo y **z** el precio del libro. Se sabe que la suma de ambos ha de ser 48, lo que nos lleva a la primera ecuación del problema:

$$x + y + z = 48$$

Por otra parte se sabe que el precio de la mochila reducido a la sexta parte, más el del bolígrafo reducido a la tercera y el del libro a la séptima suman un total de 8 euros:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 8$$

Finalmente, el precio de la mochila (**x**) es igual a la suma del precio del bolígrafo (**y**) y del libro (**z**).

$$x = y + z$$

Juntando las 3 ecuaciones se tiene el sistema que es necesario resolver para obtener los precios de los 3 productos:

$$\begin{cases} x+y+z=48 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{7}=8 \rightarrow 7x+14y+6z=336 \\ x=y+z \end{cases}$$

Este sistema lo resolveremos mediante el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 7 & 14 & 6 & 336 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2=f_2-7f_1 \\ f_3=f_3-f_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -48 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3=f_3-2f_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -48 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -16y=-48 \rightarrow y=3 \\ 7y-z=0 \rightarrow z=7y=21 \\ x+y+z=48 \rightarrow x=24 \end{cases}$$

Por tanto el precio de la mochila es 24€, el del bolígrafo 3€ y el del libro 21€.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=2x^3+ax^2+bx-6$$

a) Calcúlese a y b para que la función f tenga un máximo relativo en x=1 y un mínimo relativo en x=2.

En primer lugar, forzaremos que la derivada de la función en los puntos x=1 y x=2 sea igual a 0, condición necesaria (pero no suficiente) para que un punto pueda ser vértice (máximo / mínimo).

$$f'(x)=6x^2+2ax+b$$

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6+2a+b=0 \\ 24+4a+b=0 \end{cases} \xrightarrow{e_2=e_2-e_1} 18+2a=0$$

$$a=-9$$

$$6+2a+b=0 \rightarrow b=12$$

Para estos valores de a y b comprobaremos la condición de máximo y mínimo con la segunda derivada sabiendo que:

Un punto con derivada primera igual a 0 es máximo si la segunda derivada en ese punto es negativa.

Un punto con derivada primera igual a 0 es mínimo si la segunda derivada en ese punto es positiva.

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \\
&f''(x) = 12x - 18 \\
&f''(1) = -6 < 0 \rightarrow \textit{máximo} \\
&f''(2) = 6 > 0 \rightarrow \textit{mínimo}
\end{aligned}
$$

b) Para a = 0 y b = 0, calcular el área del recinto plano acotado por la gráfica de f y la recta de ecuación y = 8x-6

Para a = 0 y b = 0 se tiene que la función f(x) queda como:

$$f(x) = 2x^3 - 6$$

A continuación procederemos a realizar el esbozo de la gráfica con el fin de delimitar la región del plano de la que hay que calcular el área.

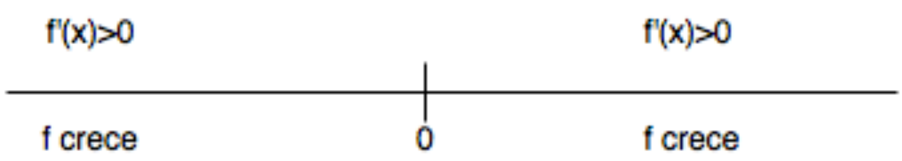
Puntos de corte de f(x)

x	y
0	-6
$\sqrt[3]{3}$	0

Crecimiento y decrecimiento de la función

$$f'(x) = 6x^2 \rightarrow 6x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Por tanto x = 0 es un posible vértice. Para comprobar si se trata de un máximo o un mínimo estudiaremos el signo de la primera derivada a su izquierda y a su derecha. Además, puesto que no existen asíntotas verticales, x = 0 es el único punto dónde la función puede ver alterada su monotonía.



Puesto que tanto a la derecha como a la izquierda del 0 la función crece, x = 0 no puede ser ni máximo ni mínimo.

Curvatura de la función

La estudiaremos con la segunda derivada calculando primero los posibles puntos de inflexión.

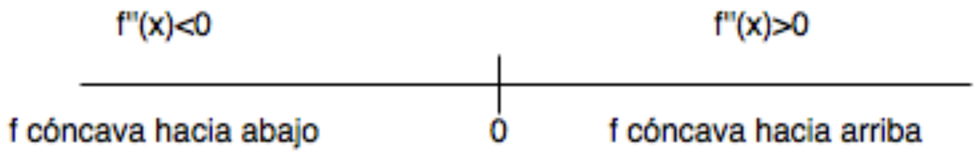
Para que x = a sea punto de inflexión es necesario que la segunda derivada se anule en ese punto y que en un entorno alrededor de ese punto se produzca un cambio de la curvatura de la función, es decir, la segunda derivada cambie de signo a su izquierda y a su derecha.

Además, recordemos que la curvatura de una función viene dada por el signo de la segunda derivada, sabiendo que:

- Si f''(x) > 0 la función es cóncava hacia arriba.
- Si f''(x) < 0 la función es cóncava hacia abajo.

Con todo esto se tiene que:

$$f''(x) = 12x \rightarrow 12x = 0 \rightarrow x = 0$$



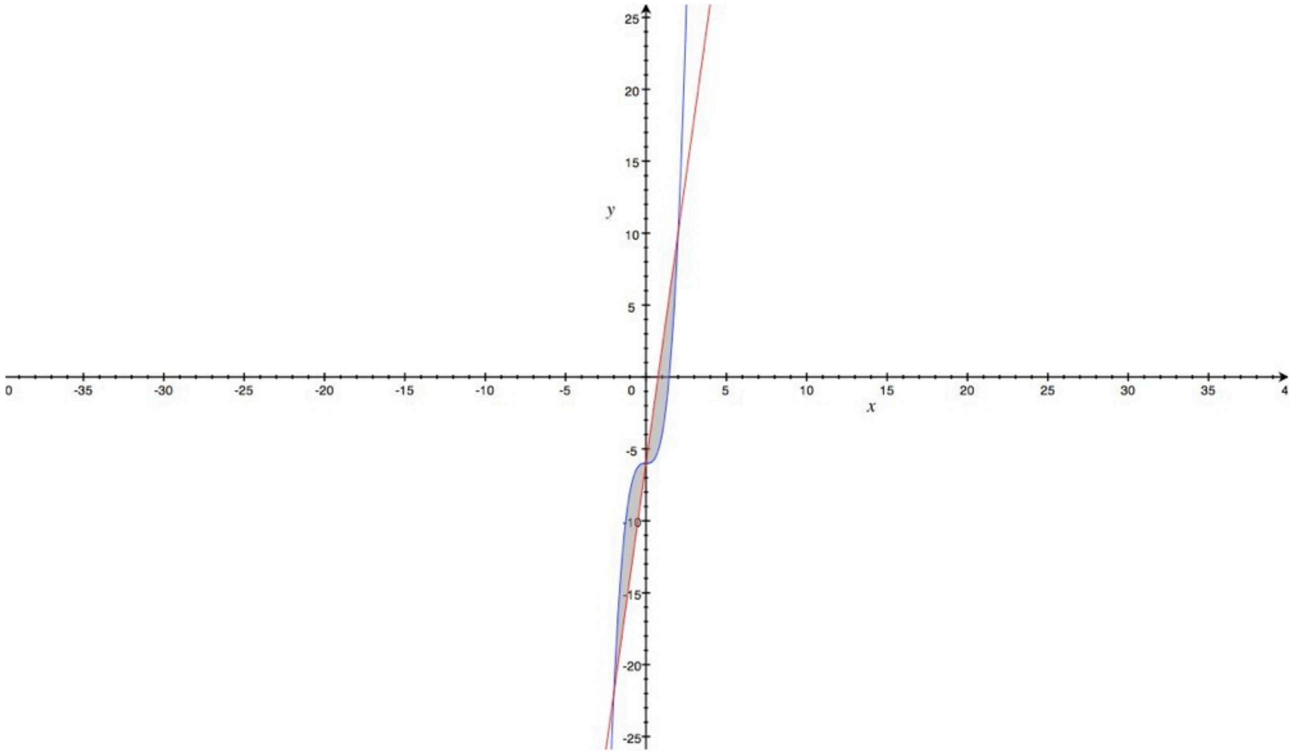
Por tanto x = 0 es un punto de inflexión.

Con todos estos datos es posible esbozar la gráfica de la función junto con la de la recta $y = 8x - 6$ que delimitarán la región pedida.

$$g(x) = 8x - 6$$

x	y
0	-6
3/4	0

Por tanto la gráfica de ambas funciones queda representada de la siguiente forma:



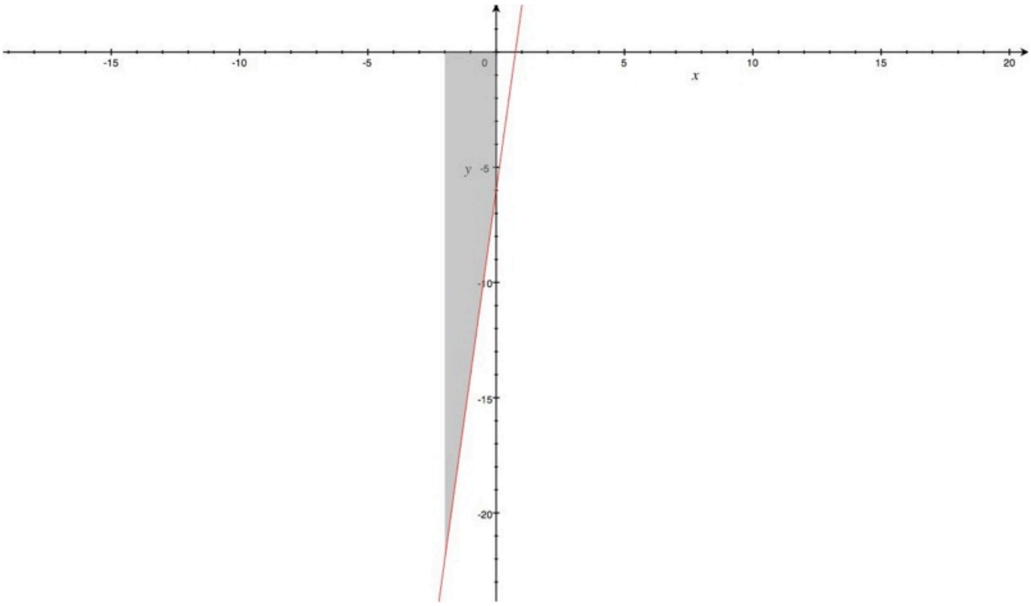
Puesto que se nos pide calcular la región del área coloreada en gris, será necesario calcular los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones que delimitarán los límites de integración:

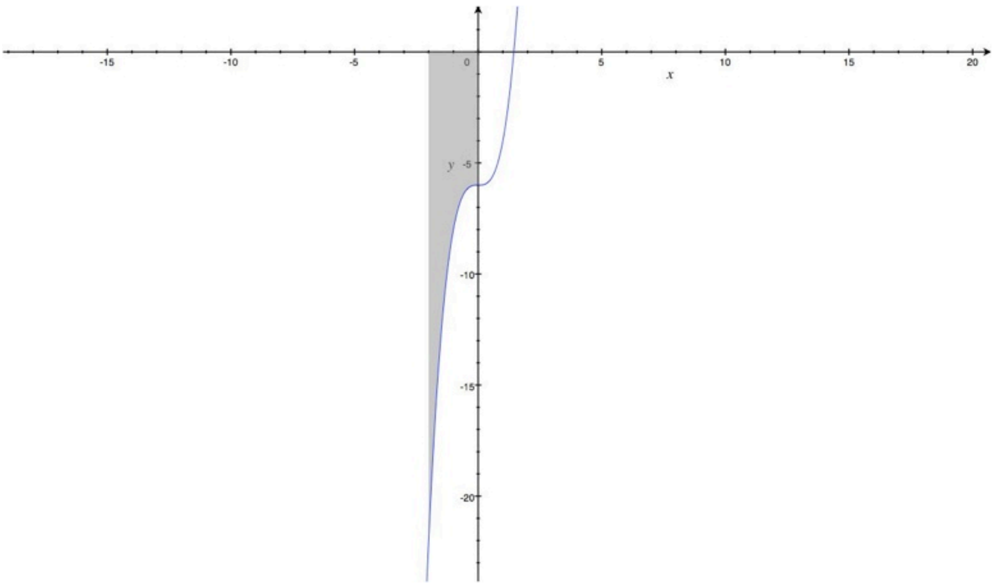
$$2x^3-6=8x-6 \to 2x^3-8x=0 \to x(2x^2-8)=0$$
$$x=0$$
$$x=\pm 2$$

Si observamos la región coloreada en gris que es de la que se pide calcular el área se puede observar que es simétrica por lo que el área comprendida entre x=-2 y x= 0 es la misma que el área comprendida entre x = 0 y x = 2.

Por tanto basta con calcular la integral entre x=-2 y x=0 y multiplicar por dos para obtener el área total.

Además, para poder realizar el cálculo de ese área es necesario restar el área que comprende la función $g(x)=8x-6$ entre su gráfica y el eje x menos el área que comprende $f(x)=2x^3-6$ entre su gráfica y el eje x.





$$2\int_{-2}^{0}(g-f)dx = 2\int_{-2}^{0}((8x-6)-(2x^3-6))dx = 2\int_{-2}^{0}(8x-2x^3)dx =$$

$$2\left[8\frac{x^2}{2}-2\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} = 2\left(8\frac{0^2}{2}-2\frac{0^4}{4}-\left(8\frac{(-2)^2}{2}-2\frac{(-2)^4}{4}\right)\right) = 2\left(-\left(16-8\right)\right) = -16$$

Por tanto el área pedida en valor absoluto es de $16\ u^2$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es de $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a $\frac{7}{12}$. Se sabe además que $P(A\,|\,B)=\frac{1}{2}$.

a) Calcular la probabilidad de que ocurra A ó B.

Por el enunciado se sabe que la probabilidad de que ocurran a la vez:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Además la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{12}$$

Conocida esta última probabilidad de se tiene que:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = \frac{7}{12} \rightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

b) Calcular la probabilidad de que ocurra A.

Conocido el valor de la probabilidad condicionada $P(A \mid B)$ podemos calcular el valor de la $P(B)$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \mid B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Y con el valor de la probabilidad de B obtenemos el valor de la probabilidad de A mediante:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) =$$
$$= \frac{5}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Solución.

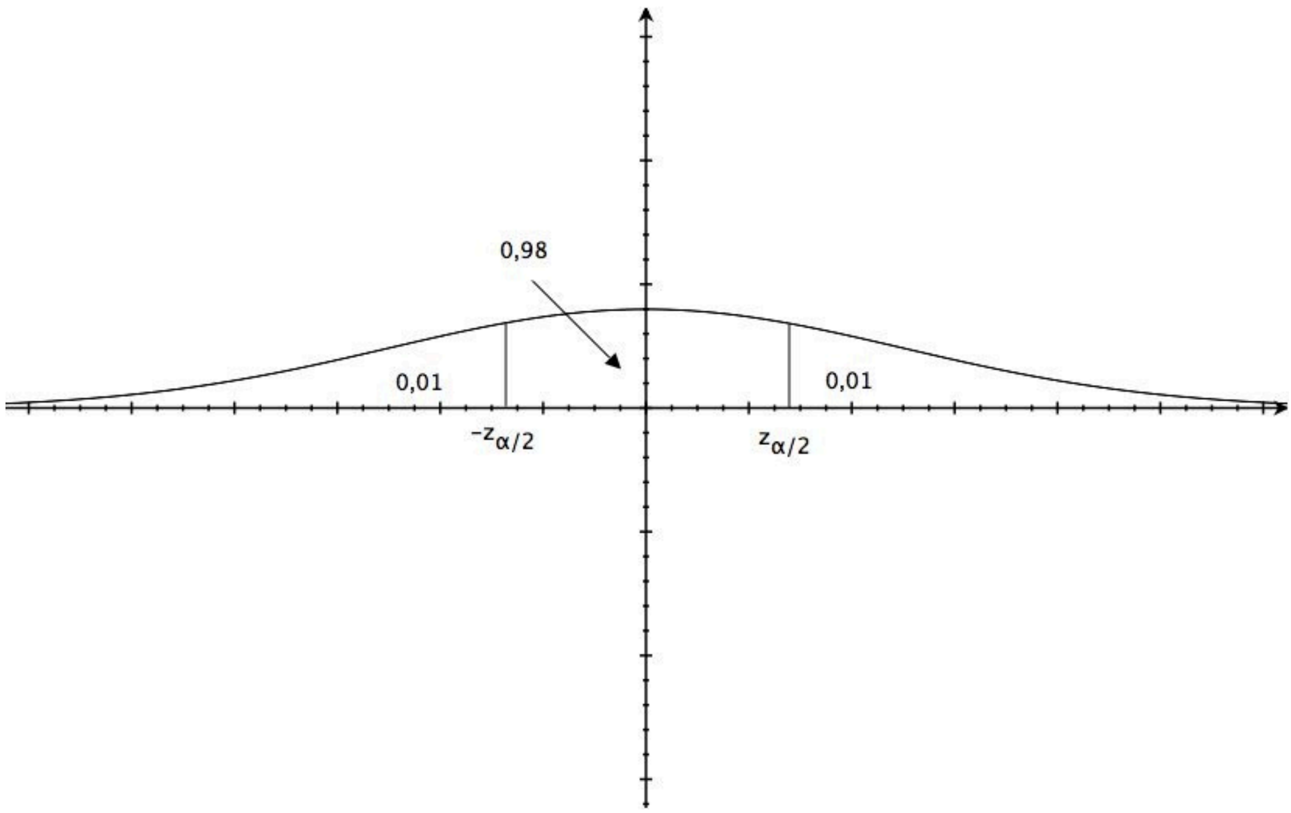
Se supone que el nivel de glucosa en sangre de los individuos de una población (medido en miligramos por decilitro) se puede aproximar por una variable aleatoria con una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 35 mg/dl. ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que permite garantizar que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ es menor que 20 mg/dl con una probabilidad mayor o igual que 98%?

En primer lugar nos encontramos ante una distribución normal para la media muestral con los siguientes parámetros:

$$N\left(\mu,\frac{35}{\sqrt{n}}\right)$$

Definida como es nuestra variable aleatoria para la media muestral, el problema nos pide averiguar el tamaño mínimo de la muestra para que el intervalo de confianza para la media muestral presente un error menor que 20 mg/dl con una probabilidad de 98%.

Es decir:



Por tanto, nuestro intervalo de confianza centrado en la media debe ser:

$$(\mu - Error, \mu + Error)$$

Donde el error para un intervalo de confianza viene dado por la expresión:

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Siendo α el nivel de significacancia:

$$\alpha = 1 - 0,98 = 0,02$$

Por tanto, puesto que nuestro error queremos que sea menor que 20 mg/dl se tiene que:

$$Error \leq 20 \rightarrow z_{\frac{0,02}{2}} \frac{35}{\sqrt{n}} \leq 20 \rightarrow z_{0,01} \frac{35}{20} \leq \sqrt{n} \rightarrow \sqrt{n} \geq \phi^{-1}(1-0,01)\frac{35}{20}$$

$$n \geq \left(\phi^{-1}(0,99)\frac{35}{20} \right)^2 = \left(2,33\frac{35}{20} \right)^2 = 16,62$$

Por tanto el tamaño muestral a de ser mayor o igual que 17.

Nóta: $\phi^{-1}(0,99)$ denota buscar el valor de z en la tabla para el que se obtiene una probabilidad de 0,99.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

Según la fórmula para la matriz inversa:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)^t$$

la matriz inversa existe cuando el determinante es distinto de 0. Por tanto, calcularemos el determinante de A para ver que valores de a lo hacen 0:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}=-a^2+6-(1)=-a^2+5=0 \rightarrow a^2=5; a=\pm\sqrt{5}$$

Por tanto para $a=\pm\sqrt{5}$ no existe inversa.

b) Para a = 2 calcular la inversa de la matriz A.

Sustituyendo por a = 2 la matriz A tiene la siguiente forma:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar calcularemos el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}=-4+6-(1)=1$$

A continuación calcularemos la matriz de adjuntos:

$$adj(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -5 & -2 & 12 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Y finalmente la traspuesta de la matriz adjunta queda:

$$(adj(A))^t=\begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

Por tanto la inversa:

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

c) Para a = 2, calcular la matriz X que satisface AX = B.

Puesto que A permite la inversa se tiene que:

$$AX=B\rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\rightarrow X=A^{-1}B$$

Y por tanto:

$$X=\begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa produce cable de fibra óptica que vende a un precio de x euros el metro. Se estima que la venta diaria de cable (en miles de metros) se expresa en términos del precio mediante la función:

$$f(x)=\frac{6}{x^2+1}$$

a) Obtener la función I(x) que determina los ingresos diarios de la empresa en función de x.

En primer lugar notar que la función habla de venta de cable en miles de metros, mientras que la x expresa el precio en euros de un metro. Por lo tanto, a la hora de definir los ingresos habrá que multiplicar el precio de un metro por 1000 para obtener el precio según miles de metros.

Ahora, la función de ingresos vendrá representada por la multiplicación de lo que vendo (representado en f(x)) por el precio en miles de metros, es decir:

$$I(x) = (1000x)\frac{6}{x^2+1}$$

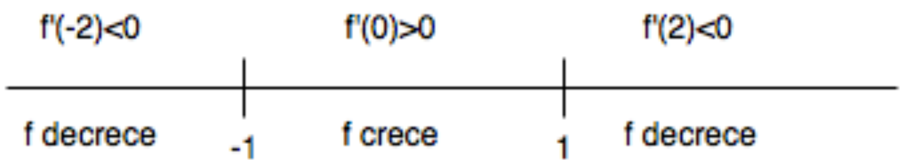
b) Calcular el precio x que ha de fijarse para que el ingreso diario sea máximo y calcular dicho ingreso máximo.

El problema nos pide maximizar los ingresos, para lo cual deberemos calcular los máximos de la función de ingresos. Para ello, es necesario obtener la derivada de los ingresos y obtener los vértices:

$$I'(x) = 6000\frac{(x^2+1)-x2x}{(x^2+1)^2} = 6000\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2};$$

$$6000\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow 1-x^2 = 0; x = \pm 1$$

A continuación estudiaremos la monotonía de la función para decidir si x = 1 y x = -1 son máximos o mínimos:



Por tanto el punto x = 1 es un máximo. En ningún caso podríamos haber tomado x = -1 puesto que al representar x el precio éste no puede ser negativo.

Por tanto para x = 1 obtenemos un máximo en los ingresos, los cuales ascienden a $I(1) = 3000$

c) Determinar las asíntotas de I(x) y esbozar su gráfica.

En primer lugar, estudiaremos el dominio de I(x). Puesto que su denominador nunca puede ser 0:

$$x^2+1=0 \rightarrow x^2 \neq -1$$

el dominio queda como:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Y puesto que el dominio es todos los reales no pueden existir asíntotas verticales al no haber puntos de discontinuidad.

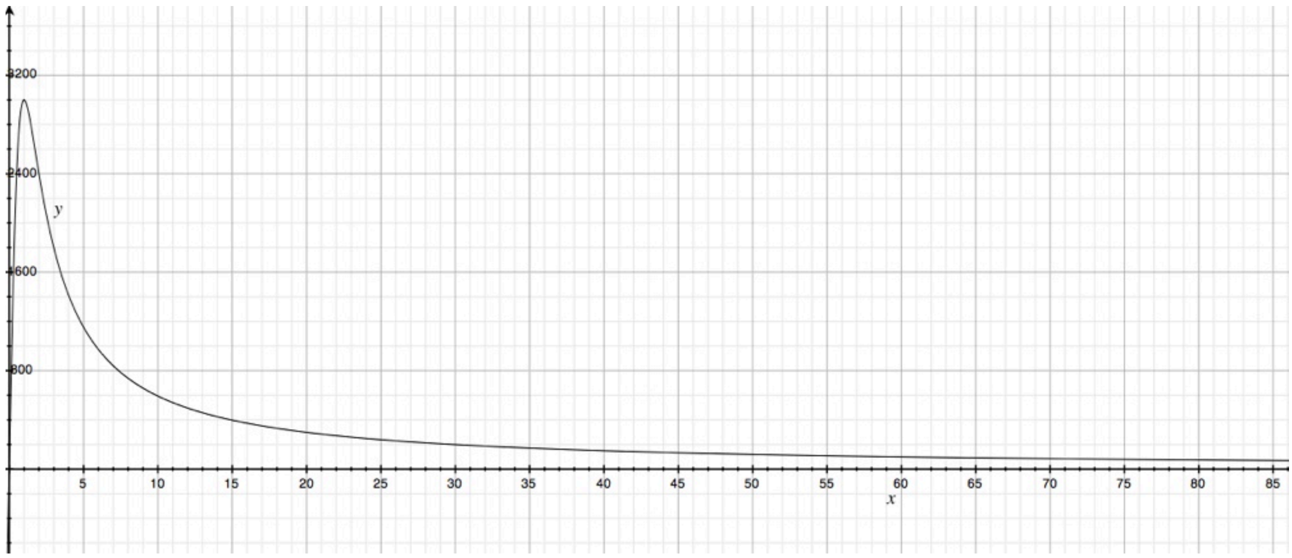
De todos modos cabe destacar que pese a que el dominio permita todos los números reales, solo nos fijaremos en los valores de x mayores o iguales que 0, ya que al representar x el precio éste no puede ser negativo.

En cuanto a las asíntotas horizontales calcularemos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6000x}{x^2+1}\right)=0$$

Por tanto la gráfica presenta una asíntota horizontal en y = 0.

El esbozo de la gráfica con toda esta información queda como:



Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).

En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0,2. Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,3. Se elige al azar un habitante de la población:

a) Calcular la probabilidad de que practique deporte regularmente.

Según el enunciado se extraen los siguientes datos:

$$P(Dieta)=0{,}2 \rightarrow P(\overline{Dieta})=0{,}8$$
$$P(Deporte \mid Dieta)=0{,}6$$
$$P(Deporte \mid \overline{Dieta})=0{,}3$$

Puesto que se pide calcular la probabilidad de que practique deporte estamos ante un problema de probabilidad total:

$$P(Deporte) = P(Dieta \cap Deporte) + P(\overline{Dieta} \cap Deporte) = 0,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,36$$

b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

En este caso estamos ante un problema de probabilidad condicionada que resolveremos mediante la fórmula de Bayes:

$$P(Dieta \mid Deporte) = \frac{P(Dieta \cap Deporte)}{P(Deporte)} = \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,36} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 2$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25 y se obtiene una media muestral igual a 12.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para estimar la media de la variable aleatoria.

En primer lugar nos encontramos ante una distribución normal para la media muestral con los siguientes parámetros:

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(12, \frac{2}{\sqrt{25}}\right) = N\left(2, \frac{2}{5}\right)$$

Definida como es nuestra variable aleatoria para la media muestral, el problema nos pide calcular un intervalo de confianza al 90% para estimar la media de la variable muestral.

Este intervalo de confianza vendrá determinado por la probabilidad con la que la media estará dentro de el, en este caso 90%, lo cual nos dice que el nivel de significancia es:

$$\alpha = 1 - 0,9 = 0.1$$

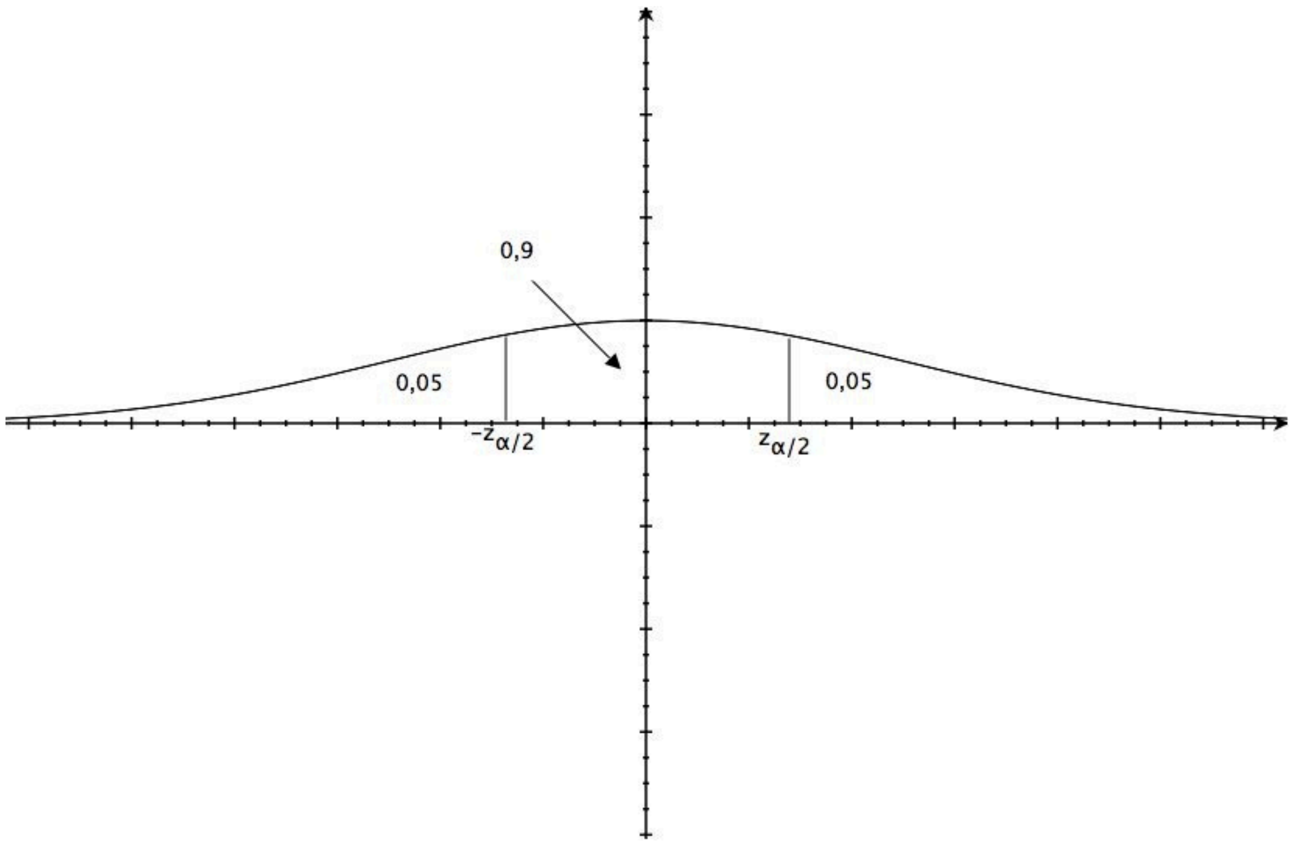
Un intervalo de confianza para la media de una variable aleatoria con distribución normal viene determinado por:

$$(\mu - Error, \mu + Error)$$

dónde el error queda determinado por:

$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si quisiésemos representar la situación pedida obtendríamos la siguiente gráfica:



Finalmente con todos los datos proporcionados calcularemos el intervalo de confianza:

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{0,05}\cdot\frac{2}{5} = \phi^{-1}(1-0,05)\cdot\frac{2}{5} = \phi^{-1}(0,95)\cdot\frac{2}{5} = 1,65\cdot\frac{2}{5} = 0,66$$
$$(\mu - Error, \mu + Error) = (12-0,66, 12+0,66) = (11,34, 12,66)$$

b) Determínese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 0,1 con un nivel de confianza de al menos el 95%.

En este caso se nos pide calcular el tamaño muestral para garantizar que el error al estimar la media poblacional a partir de la media muestral sea menor que 0,1 con una probabilidad de 0,95.

Por tanto el nivel de significancia queda expresado como:

$$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$$

Y por tanto la expresión del error:

$$Error < 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \rightarrow z_{0{,}05/2}\frac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \rightarrow \phi^{-1}(1-0{,}025)\frac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \rightarrow$$

$$1{,}96\frac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \rightarrow n > \left(\frac{1{,}96\cdot 2}{0{,}1}\right)^2 = 1536{,}64$$