1º ESO

CAPÍTULO 2: NÚMEROS NATURALES.

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos

Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Sistema de numeración griego clásico

Ilustración: A. Ortega

Resumen

Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: “El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer”. ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

Fotografía: Clarisa Rodrígues

En este capítulo aprenderemos a resolver problemas similares a este y profundizaremos en la tabla de multiplicar mediante conceptos como: divisibilidad, factorización o números primos.

Descubrirás algunos de los grandes secretos de los números y nunca te imaginarías que la tabla de multiplicar escondiese tantos misterios ocultos…

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. REPASO DE NÚMEROS NATURALES

1.1. Los sistemas de numeración

El sistema de numeración decimal

¿Por qué en otros países, aunque se hablen lenguas diferentes, se usan los mismos números?

Esos números, los que nosotros usamos, constituyen un lenguaje universal y se dice que están expresados en el sistema decimal.

El **sistema de numeración decimal** es el más usado en todo el mundo y en casi todos los ámbitos.

En este sistema el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Actividades resueltas

- En el número 4 652 031 tenemos:

  - La cifra de las unidades: el 1

  - Luego la cifra de las decenas: el 3, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será:

  $$3·10 = 30$$

  - En tercer lugar, las centenas: el 0, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100:

  $$0·100 = 0$$

  - En cuarto lugar las unidades de millar: 2, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1000 la cifra situada en ese lugar:

  $$2 \cdot 1\,000 = 2\,000$$

  - Luego, las decenas de millar: 5 cuyo valor será:

  $$5 \cdot 10\,000 = 50\,000$$

  - En sexto lugar, las centenas de millar: 6, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 100000.

  $$6 \cdot 100\,000 = 600\,000$$

  - Y, por último, las unidades de millón: 4, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 1 000 000:

  $$4 \cdot 1\,000\,000 = 4\,000\,000$$

Con esto observamos que el número 4 652 031 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$$4\,652\,031 = 4 \cdot 1\,000\,000 + 6 \cdot 100\,000 + 5 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1$$

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 7 653 b) 30 500 c) 275 643 d) 200 543

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 5 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 508 744 b) 65 339 001 c) 7 092 157 d) 9 745

3. Razona por qué en un número natural con dos cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias?

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1 000

Ejemplo:

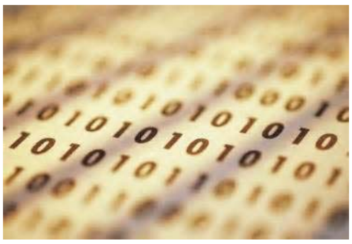
- El número MDL equivale en el sistema decimal al 1 550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1 555, pero las cifras siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Reloj con números romanos

Otros sistemas de numeración

Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo (como los meses de un año)

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas: el 0 y el 1


Cifras del sistema binario

Actividades propuestas

4. ¿Podrías escribir los números del 1 al 10 en el sistema binario?

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Operaciones elementales

Multiplicación de números naturales

Como ya sabes, **multiplicar dos números naturales** es equivalente a sumar uno de ellos consigo mismo tantas veces como indica el otro.

Por ejemplo:

Hacer $6 \cdot 5$ es lo mismo que hacer $6 + 6 + 6 + 6 + 6$

Nota:

Aunque en primaria se usaba el símbolo "x" para denotar el producto, a partir de ahora y, por comodidad, lo simbolizaremos con un punto: ·

Recuerda que:

Las palabras "**multiplicación**" y "**producto**" significan lo mismo, es decir, hacen referencia a la misma operación.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

Nota

Recuerda la **propiedad conmutativa** de la multiplicación:

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$$

Ejemplo:

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

Si llamamos *a, b* y *c* a tres números naturales, se verifica la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)}$$

Por ejemplo:

Sustituyendo las letras *a* por 2, *b* por 5 y *c* por 7, tenemos que:

$$2 \cdot (5 + 7) = (2 \cdot 5) + (2 \cdot 7)$$

Esta propiedad también se verifica para la resta.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta

Considerando otra vez, *a, b* y *c* números naturales cualesquiera, se cumple que:

$$\boldsymbol{a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)}$$

Estas propiedades son muy útiles para hacer cálculos mentales rápidos descomponiendo números:

Calcular $15 \cdot 23$ mentalmente es complicado, pero si hacemos:

$15 \cdot 23 = 15 \cdot (20 + 3) = (15 \cdot 20) + (15 \cdot 3)$ resulta más sencillo.

Si leemos la igualdad de derecha a izquierda, es decir:

$(15 \cdot 20) + (15 \cdot 3) = 15 \cdot (20 + 3)$ se suele decir que *hemos sacado factor común el número 15,* pero realmente estamos hablando otra vez de la propiedad distributiva.

Generalizando:

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ es lo mismo que: $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$, y utilizando la propiedad conmutativa: $(b \cdot a) + (c \cdot a) = (b + c) \cdot a$.

$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$ es lo mismo que: $(a \cdot b) - (a \cdot c) = a \cdot (b - c)$, y utilizando la propiedad conmutativa: $(b \cdot a) - (c \cdot a) = (b - c) \cdot a$.

Ejemplos:

a) $(870 \cdot 4) - (870 \cdot 3) = 870 \cdot (4 - 3) = 870 \cdot 1 = 870$
b) $(450 \cdot 2) + (3 \cdot 450) = (2 + 3) \cdot 450 = 5 \cdot 450 = 2\ 250$
c) $(45 \cdot 6) - (45 \cdot 5) = 45 \cdot (6 - 5) = 45 \cdot 1 = 45$

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

División de números naturales

Ejemplo:

- En el comedor del instituto las mesas son de 6 personas y en la clase de 1º de la ESO hay 33 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 5 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$$

> ***Nota***:
>
> La palabra "**cociente**" significa el resultado de hacer una "**división**" Los símbolos utilizados para representarlas son:
>
> /, : , y la fracción: —

Cada uno de los números que intervienen en la división se denominan:

33 → Dividendo 6 → Divisor 5 → Cociente 3 → Resto

Además, como ya sabes, se cumple que: 33 = (6 · 5) + 3

Esta propiedad se cumple siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & C \end{array}$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{D = (d \cdot c) + r}$$

Ejemplo:

- El cociente entre 3 658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.

3 658 = (65 · 56) + 18

Ejemplos:

- 25/5, 25 : 5 y $\frac{25}{5}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 25 entre 5.

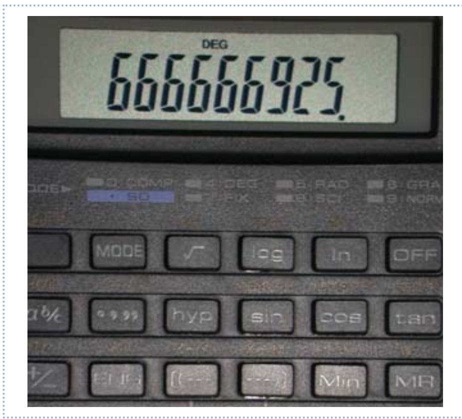
La expresión:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

También significa lo mismo, pero en Secundaria y Bachillerato apenas se utiliza, así que conviene que te familiarices cuanto antes con las anteriores.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Divisiones con calculadora



Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo:

Si hacemos:

325 ÷ 5 = 65

Pero si hacemos:

325 ÷ 15 = 21.6666666667

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: 325 – (15 · 21) = 10.

Jerarquía de las operaciones

En la expresión: 3 · 4 + 2, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una prioridad en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería:

$$3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$$

¿Y en 8 : 2 · 3? Son divisiones y multiplicaciones con igual prioridad. Podemos convenir que primero se realiza la primera operación, la que está más a la izquierda: 8 : 2 · 3 = 4 · 3 = 12, en lugar de 8 : 2 · 3 = 8:6 = 4/3.

En general:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre **paréntesis** y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las **multiplicaciones** y **divisiones** y luego, las **sumas y restas.**

En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.

Ejemplo:

- Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(15 + 10) \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75$$

$$15 + 10 \cdot 3 = 15 + 30 = 45$$

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Notas

a) Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: (21 · 2) + 30 resulta innecesario, ya que por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.

b) Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

Actividades propuestas

5. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 23 · 4 – 23 · 3   b) 540 · 8 + 540 · 2   c) 55 · 13 – 55 · 3   d) 600 · 33 – 600 · 3

6. Construye dos números con las cifras 4, 5 y 6 tal que su producto sea lo más grande posible.

7. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d \cdot c + r$

a) 6 738 : 456   b) 34 540 : 30   c) 240 035 : 981   d) 397 : 45

8. ¿Recuerdas la definición de división exacta? ¿Qué ocurre en la igualdad anterior si la división es exacta?

9. El equipo de fútbol del instituto decide celebrar su victoria de liga yendo de viaje con su entrenador. Sabiendo que el equipo lo componen 20 alumnos, que el viaje les cuesta a cada uno 150 €, la noche en habitación individual 50 € y que han pagado 7 350 € en total, ¿cuántos días han estado de viaje?

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF