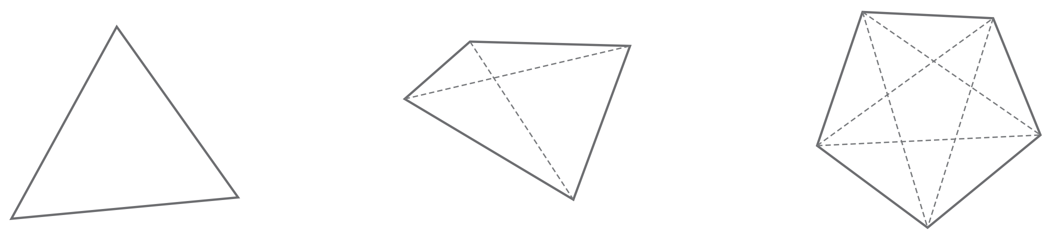
EJERCICIOS PROPUESTOS

12.1 Dibuja polígonos convexos de 3, 4 y 5 lados con sus correspondientes diagonales. ¿Cuántas hay en cada uno?



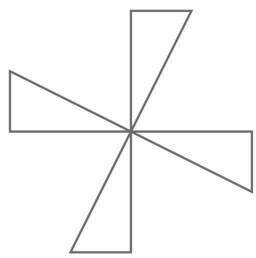
Triángulo (0 diagonales) Cuadrilátero (2 diagonales) Pentágono (5 diagonales)

12.2 Dibuja las siguientes figuras planas.

a) Un polígono cóncavo regular. **b) Una figura que no sea un polígono.**

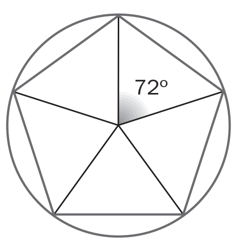
a) Al ser un polígono cóncavo, tiene al menos un ángulo mayor de 180°. Si fuera regular, debería tener todos los ángulos iguales, y eso es imposible, porque no existe un polígono regular con los ángulos mayores de 180°.

b) No es un polígono porque los lados se cortan y no están unidos sucesivamente.



12.3 Dibuja un pentágono regular en una circunferencia circunscrita de 4 centímetros de radio. ¿Cuánto mide el lado del pentágono?

Se dibuja la circunferencia de 4 cm de radio y 5 ángulos centrales de 72°.



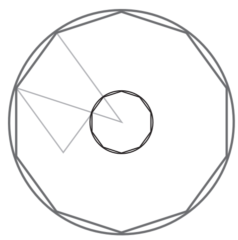
El lado del pentágono mide 4,70 cm.

12.4 **¿Se puede dibujar un hexágono de 6 centímetros de lado en una circunferencia de 6 centímetros de diámetro?**

No porque en el radio de la circunferencia circunscrita a un hexágono regular tiene la misma medida que el lado del hexágono. Y el radio de esa circunferencia es de 3 cm y no de 6 cm.

12.5 **Construye un decágono regular de 25 milímetros de lado.**

Se dibuja un decágono regular en una circunferencia cualquiera. Luego se prolonga un lado del decágono hasta que tenga 25 mm y se dibujan los radios y las paralelas para obtener la circunferencia circunscrita al polígono buscado.

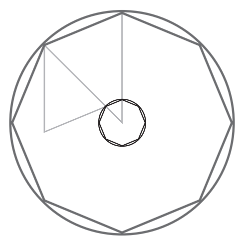


12.6 **Dibuja un octógono de 3,5 centímetros de lado.**

a) ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita?

b) ¿Cómo construirías un cuadrado a partir del octógono? ¿Cuánto mediría su lado?

Se realiza como en el ejercicio anterior pero con un octógono.

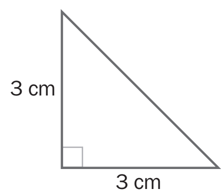


a) El radio de la circunferencia mide 4,58 cm

b) Uniendo vértices no contiguos dejando uno entre ellos. Su lado mediría: $l = \sqrt{(4,58)^2 + (4,58)^2} = 6,48$ cm

12.7 **Dibuja un triángulo rectángulo isósceles.**

Para que sea rectángulo debe tener un ángulo de 90°, y para que sea isósceles, los catetos deben medir lo mismo.



12.8 **Fíjate en el rectángulo y el romboide.**

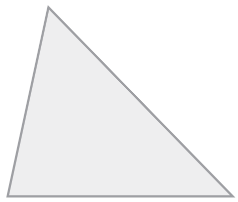
a) ¿Qué tienen en común? **b) ¿En qué se diferencian?**

a) Son paralelogramos con lados paralelos iguales.

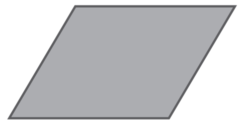
b) En que el rectángulo tiene los cuatro ángulos iguales, y el romboide los tiene iguales dos a dos.

12.9 Clasifica los polígonos.

a) De tres lados.



b) De cuatro lados.



a) Triángulo escaleno acutángulo.

b) Cuadrilátero, paralelogramo, romboide.

12.10 ¿Se puede construir un triángulo de manera que sus ángulos midan 105°, 45° y 35°? Razona la respuesta.

La suma de los ángulos de un triángulo debe ser 180°.

Se suman los 3 ángulos dados: $105° + 45° + 35° = 185° \neq 180°$; por tanto, no se puede construir el triángulo.

12.11 En un triángulo rectángulo un ángulo agudo mide 30°. ¿Cuánto mide el otro?

En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 90°, y conocemos otro que mide 30°.

Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, el otro ángulo mide: $180° - 90° - 30° = 60°$.

12.12 Contesta a las siguientes cuestiones sobre un heptágono regular.

a) ¿Cuál es la suma de sus ángulos interiores?

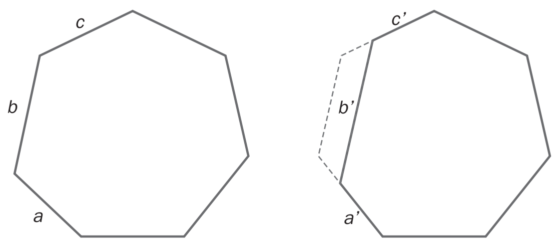
b) ¿Cuánto mide cada uno de ellos?

c) Si el heptágono fuera irregular, ¿valdrían lo mismo?

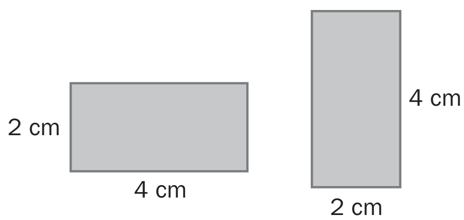
a) La suma de sus ángulos interiores es: $180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot (7 - 2) = 180° \cdot 5 = 900°$

b) Al ser regular, todos los lados y ángulos miden lo mismo. Cada ángulo mide: $\dfrac{900}{7} = 128{,}57° = 128°\ 34'$

c) Podrían valer lo mismo. Por ejemplo, si en el primer heptágono, que es regular, sustituimos cualquier lado, por ejemplo, *b*, por otro segmento paralelo *b'*, los ángulos permanecen iguales, pero los lados *a*, *b* y *c* varían.



12.13 ¿Son iguales los siguientes rectángulos?



Sí, porque tienen los lados iguales y los ángulos correspondientes iguales.

12.14 Si dos cuadrados tienen un lado igual, ¿se puede decir que son iguales?

Sí, porque los cuadrados tienen todos los ángulos iguales a 90° y todos los lados iguales. Por tanto, si coinciden en un lado, coinciden en todos.

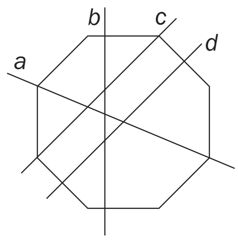
12.15 Si dos rombos tienen un lado igual, ¿se puede decir que son iguales?

No necesariamente. Solo se puede afirmar que al ser los lados de un rombo iguales, los dos rombos tienen los lados iguales, pero no se puede asegurar que sus ángulos también lo sean.

12.16 ¿Son iguales dos hexágonos regulares con los lados iguales?

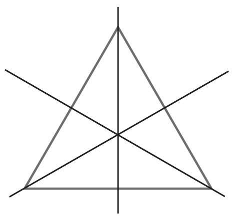
Como los ángulos de cualquier hexágono regular miden 120° y sus lados son iguales, los hexágonos son iguales.

12.17 Indica cuáles de las rectas dibujadas en la figura son ejes de simetría.



Los ejes de simetría son: *a* y *d*

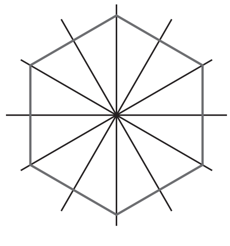
12.18 Dibuja un triángulo equilátero de 8 centímetros de lado y traza en él todos los ejes de simetría. ¿Cuánto mide el ángulo que forman dos ejes contiguos?



El ángulo que forman dos ángulos contiguos mide:

$$\frac{180°}{3} = 60°$$

12.19 Traza todos los ejes de simetría que tiene un hexágono regular cuya circunferencia circunscrita tiene 5 centímetros de radio. ¿Cuánto mide el ángulo que forman dos ejes contiguos?



El ángulo que forman dos ángulos contiguos mide:

$$\frac{180°}{6} = 30°$$

12.20 Dibuja un triángulo con los datos siguientes.

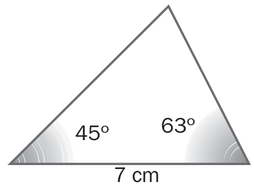
a) Un lado mide 7 centímetros, y los ángulos contiguos, 45° y 63°.

b) Un ángulo es recto, y los catetos miden 3 y 4 centímetros.

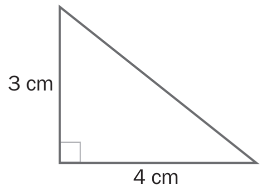
c) Dos lados miden 5 y 6 centímetros, y el ángulo que forman es de 108°.

a) Dibujamos el segmento $a = 7$ y, con vértice en sus extremos, construimos los ángulos $\widehat{C} = 45°$ y $\widehat{B} = 63°$.

El punto de corte es el otro vértice, A, del triángulo.

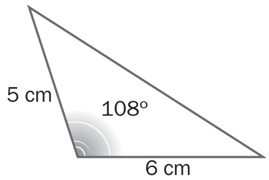


b) Dibujamos el ángulo recto. A partir de su vértice y sobre cada uno de sus lados dibujamos los segmentos $a = 3$ y $b = 4$. Unimos los extremos de los segmentos y obtenemos el triángulo.



c) Dibujamos el ángulo $\widehat{C} = 108°$ con el compás o el transportador. A partir de su vértice y sobre cada uno de sus lados dibujamos los segmentos $a = 5$ y $b = 6$.

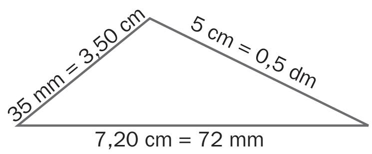
Unimos los extremos de los segmentos y obtenemos el triángulo.



12.21 Las medidas de los lados de un triángulo son: 5 centímetros, 7,20 centímetros y 35 milímetros. Los lados de otro triángulo miden: 72 milímetros, 3,5 centímetros y 0,5 decímetros. Dibújalos y estudia si son iguales.

Si ponemos todas las medidas en centímetros, los lados de los triángulos coinciden: 5; 7,2 y 3,5 cm.

Por el primer criterio de igualdad de triángulos, estos dos triángulos son iguales ya que tienen los lados iguales.

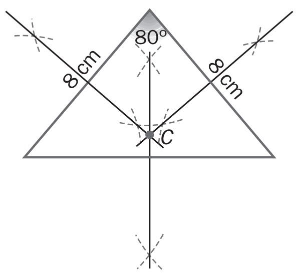


12.22 ¿Es posible construir un triángulo con los lados iguales a 4, 6 y 10 centímetros? ¿Por qué?

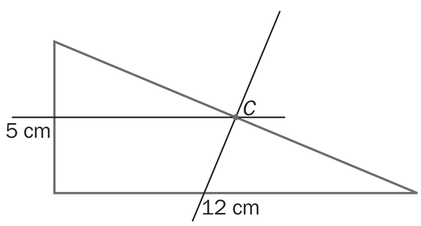
No, porque la suma de las medidas de los lados más pequeños debe ser mayor que la del grande.

Al intentar dibujarlo, resultaría un segmento.

12.23 Dibuja las mediatrices de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 centímetros y el ángulo que forman es de 80°. Señala el circuncentro.



12.24 Traza las mediatrices de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 5 centímetros. ¿Dónde se cortan?



Las tres mediatrices se cortan en el circuncentro.

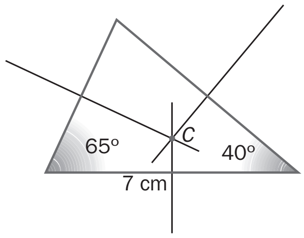
12.25 Uno de los lados de un triángulo mide 7 centímetros, y sus ángulos contiguos, 65° y 40°.

a) Señala su circuncentro.

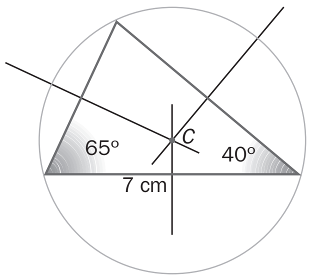
b) Dibuja la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

a) Construimos el triángulo dibujando el lado. En sus extremos trazamos dos semirrectas con las medidas de los ángulos, y donde se cortan está el otro vértice.

Luego, trazamos las mediatrices y señalamos el punto donde se cortan, que es el circuncentro.

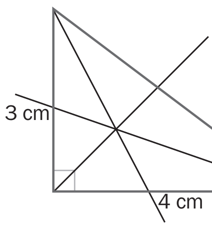


b) Es la circunferencia que tiene como centro el circuncentro y por radio la distancia de este punto a cualquiera de los vértices del triángulo.



12.26 Traza las bisectrices de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 y 3 centímetros.

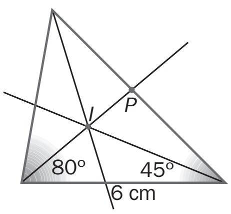
Una vez realizado el triángulo, trazamos las bisectrices de los tres ángulos.



12.27 Uno de los lados de un triángulo mide 6 centímetros, y los ángulos contiguos a él, 45° y 80°.

a) Señala el incentro.

b) ¿Cuál es el radio de la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo?



Dibujamos el triángulo empezando por el lado y luego, en sus extremos, midiendo los ángulos. Las semirrectas que determinan esos ángulos se cortan en un punto que es el otro vértice del triángulo.

a) Luego, trazamos las bisectrices de los ángulos, y el punto de corte es el incentro, *I*.

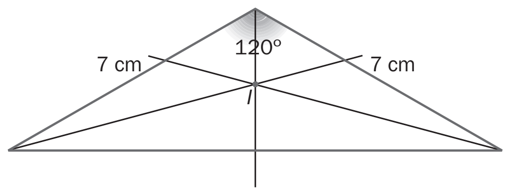
b) El radio de la circunferencia tangente a los tres lados es la longitud del segmento *IP*.

12.28 En un triángulo isósceles los lados iguales miden 7 centímetros cada uno y el ángulo que forman, 120°.

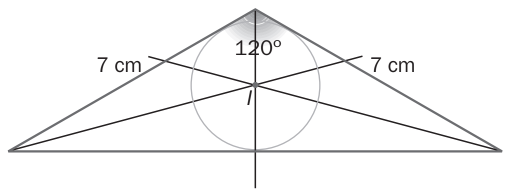
a) Dibuja su incentro.

b) Dibuja la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

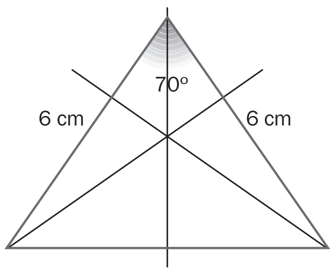
a) Una vez dibujado el triángulo, trazamos las bisectrices de los ángulos, y el punto de corte es el incentro, *I*.



b) La circunferencia es la que tiene su centro en el incentro del triángulo, y su radio es la distancia del incentro a uno de los lados del triángulo.

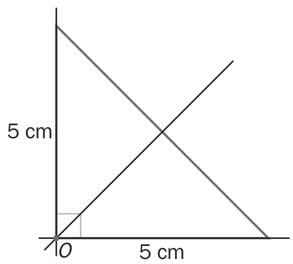


12.29 Traza las alturas de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 6 centímetros cada uno y el ángulo que forman es de 70°.



12.30 Dibuja un triángulo rectángulo isósceles de catetos iguales a 5 centímetros. Halla el ortocentro e indica con qué otro punto coincide.

El ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.

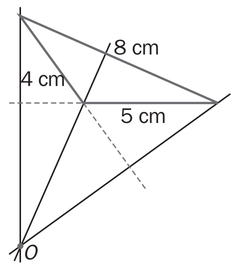


12.31 Los tres lados de un triángulo miden 5, 4 y 8 centímetros.

a) Traza sus alturas.

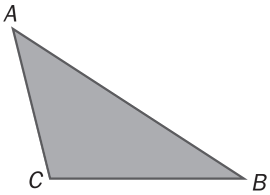
b) Señala su ortocentro e indica si es interior o exterior al triángulo.

a) y b) El ortocentro es exterior al triángulo.

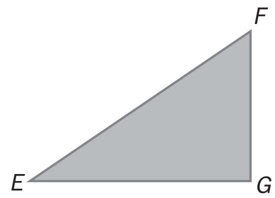


12.32 Copia los siguientes triángulos y dibuja sus medianas.

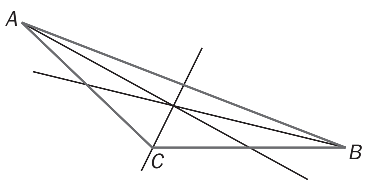
a)



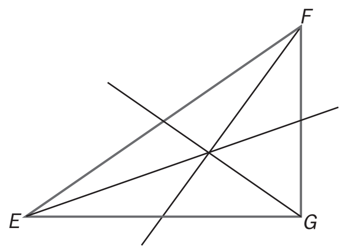
b)



a)

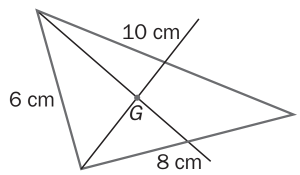


b)

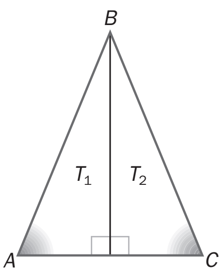


12.33 Halla el baricentro de un triángulo de lados 8, 6 y 10 centímetros. ¿Es necesario trazar las tres alturas?

Construimos el triángulo; luego, dos medianas, y el punto de corte de estas es el baricentro. Por tanto, no es necesario trazar las alturas.



12.34 Comprueba que en un triángulo isósceles la mediana sobre el lado desigual lo divide en dos triángulos iguales.



En un triángulo isósceles trazamos la mediana sobre el lado desigual.

Se forman dos triángulos rectángulos, T_1 y T_2, con los 3 lados iguales.

Las hipotenusas, por ser los lados iguales de un triángulo isósceles.

Los catetos mayores, por ser la mediana, y los catetos menores, por ser la mitad de la base del triángulo inicial.

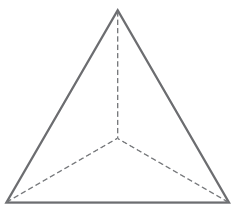
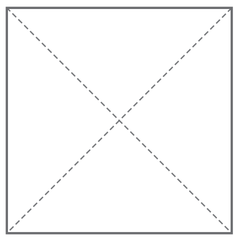
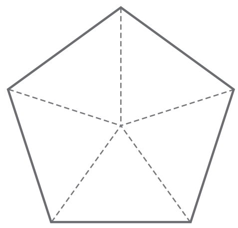
Por tanto, aplicando el criterio 1, T_1 y T_2 son iguales.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

12.35 Escribe la fórmula que da la medida de un ángulo de un polígono regular en función del número de lados.

Número de lados del polígono	Número máximo de triángulos en que se puede dividir	Medida de todos los ángulos	Medida de cada ángulo
3	1	$180°$	$\frac{180°}{3} = 60°$
4	2	$180° \cdot 2 = 360°$	$\frac{360°}{4} = 90°$
5	3	$180° \cdot 3 = 540°$	$\frac{540°}{5} = 108°$
6	4	$180° \cdot 4 = 720°$	$\frac{720°}{6} = 120°$
n	$n - 2$	$180° \cdot (n - 2)$	$\frac{180° \cdot (n - 2)}{n}$

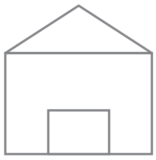
12.36 Encuentra la fórmula que da la medida de un ángulo central de un polígono regular en función del número de lados.

Triángulo equilátero	Cuadrado	Pentágono	
			n lados
$\frac{360}{3} = 120°$	$\frac{360}{4} = 90°$	$\frac{360}{5} = 72°$	$\frac{360°}{n}$

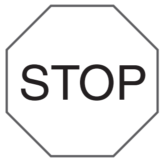
CÁLCULO MENTAL

12.37 ¿Qué tipo de polígono ilustra cada uno de los siguientes dibujos?

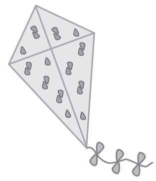
a)



b)



c)



a) Pentágono convexo irregular.
b) Octógono convexo regular.
c) Cuadrilátero (trapezoide).

12.38 ¿Qué cuadriláteros son los que tienen los lados iguales? ¿Y cuáles tienen los ángulos iguales?

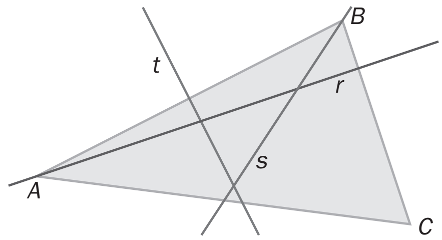
Los cuadrados y los rombos son los cuadriláteros que tienen los lados iguales.

Los cuadrados y los rectángulos son los cuadriláteros que tienen los ángulos iguales.

12.39 Un triángulo rectángulo tiene los dos catetos iguales. ¿Qué puedes decir de los ángulos agudos correspondientes?

Los ángulos agudos correspondientes son iguales. Se trata de un triángulo rectángulo isósceles.

12.40 Di cuáles son las rectas *r*, *s* y *t* trazadas en el siguiente triángulo.



r es la altura sobre el lado *BC*.

s es la mediana sobre el lado *AC*.

t es la mediatriz del lado *AB*.

12.41 ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero?

Los tres ángulos de un triángulo suman 180°, y en un triángulo equilátero, los tres ángulos son iguales.
Entonces, cada ángulo mide: $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

12.42 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Hay paralelogramos que no son rombos.

b) Hay trapecios que tienen los cuatro ángulos iguales.

c) Hay cuadriláteros que son rombos y rectángulos a la vez.

d) Hay rectángulos que tienen los cuatro ángulos iguales, pero no rectos.

a) Verdadero. Por ejemplo, los rectángulos y los romboides.

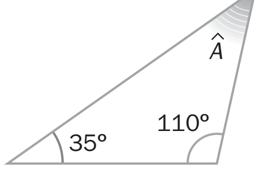
b) Falso. Si tienen los cuatro ángulos iguales, son rectángulos o cuadrados.

c) Verdadero. Por ejemplo, el cuadrado.

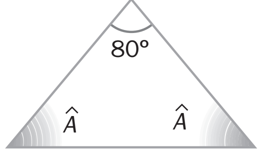
d) Falso. Los rectángulos, por definición, tienen los cuatro ángulos rectos.

12.43 En los siguientes triángulos, calcula el ángulo o los ángulos que faltan.

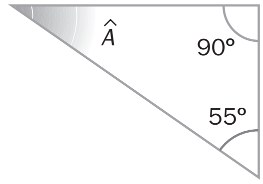
a)



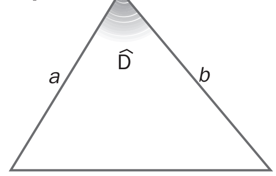
b)



c)



d)



a) $\widehat{A} + 35^\circ + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - 110^\circ - 35^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 35^\circ$

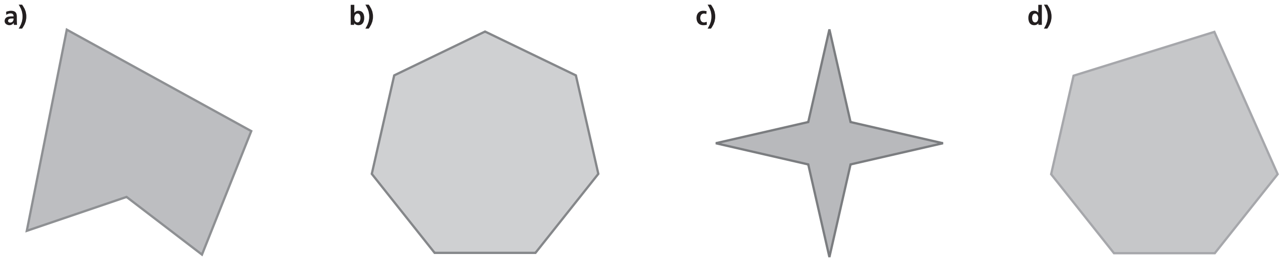
b) $\widehat{A} + \widehat{A} + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{A} = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow 2 \cdot \widehat{A} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{A} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

c) $\widehat{A} + 55^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - 55^\circ - 90^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 35^\circ$

d) $\widehat{A} + 60^\circ + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - 100^\circ - 60^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 20^\circ$

Polígonos

12.44 Clasifica los siguientes polígonos.



a) Pentágono irregular cóncavo.
b) Heptágono regular convexo.
c) Octógono irregular cóncavo.
d) Hexágono irregular convexo.

12.45 ¿Cuántos ángulos iguales tiene un octógono regular?

Como es un polígono regular, tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales. Por tanto, tiene 8 ángulos iguales.

12.46 El lado de un cuadrado mide 3,5 centímetros, y el de otro, 35 milímetros. Razona si son iguales.

Si la medida de los lados se expresa en la misma unidad, centímetros, los dos miden lo mismo, 3,5 cm.
Por tanto, si tienen sus lados y sus ángulos iguales, los dos cuadrados son iguales.

12.47 Calcula cuántas diagonales tiene un heptágono.

Sea n el número de lados de un polígono.
El número de diagonales de un polígono de 7 lados, es decir, del heptágono, es: $\frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{7 \cdot (7-3)}{2} = 14$

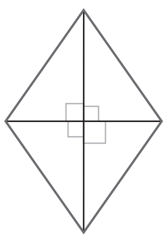
12.48 Completa en tu cuaderno las siguientes frases.

a) El cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos y los ángulos iguales es un …
b) El polígono con dos lados iguales que forman ángulo recto y un tercer lado distinto es un …
c) El polígono con sus cuatro lados iguales y los ángulos iguales dos a dos es un …
d) El triángulo con los tres lados distintos es …

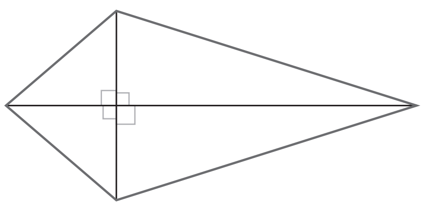
a) Rectángulo
b) Triángulo rectángulo isósceles
c) Rombo
d) Escaleno

12.49 ¿Verdadero o falso?: "Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, se trata de un rombo". Dibuja las figuras correspondientes para razonar tu respuesta.

Es falso porque el trapezoide también cumple esa condición.



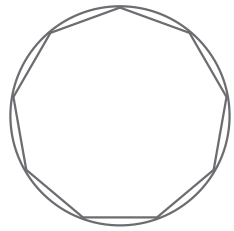
Rombo



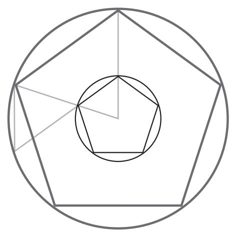
Trapezoide

Construcción de polígonos regulares

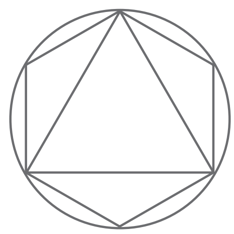
12.50 **Construye un eneágono regular sabiendo que el diámetro de su circunferencia circunscrita mide 7 centímetros.**



12.51 **Traza un pentágono regular de 3 centímetros de lado.**



12.52 **Construye un octógono regular en una circunferencia circunscrita de 8 centímetros de diámetro. Une con segmentos los vértices no consecutivos del octógono. La figura que obtienes de este modo, ¿es regular?**

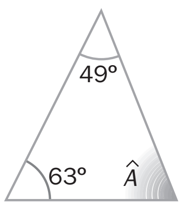


Se obtiene un triángulo equilátero.

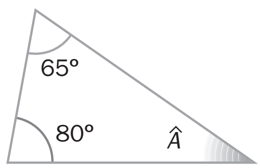
Suma de los ángulos de un polígono

12.53 **Calcula el ángulo $\widehat{A}$ en los siguientes triángulos.**

a)



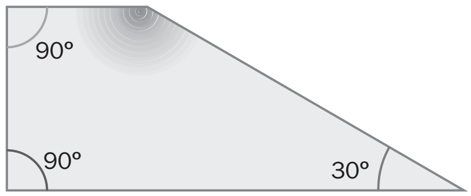
b)



a) $\widehat{A} + 63° + 49° = 180° \quad \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 63° - 49° \quad \Rightarrow \widehat{A} = 68°$

b) $\widehat{A} + 65° + 80° = 180° \quad \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 65° - 80° \quad \Rightarrow \widehat{A} = 35°$

12.54 En el siguiente trapecio rectángulo falta un ángulo. ¿Cuánto mide?



La suma de los ángulos de un cuadrilátero es $180° \cdot (4 - 2) = 360°$.
Los 3 ángulos conocidos suman: $90° + 90° + 30° = 210°$
Si se llama $\widehat{A}$ al ángulo que falta, se obtiene: $\widehat{A} = 360° - 210° = 150°$

12.55 Calcula la suma de los ángulos interiores de estos polígonos.

a) Trapezoide
b) Dodecágono
c) Octógono regular
d) Eneágono regular

a) Tiene 4 lados. Entonces, $180° \cdot (4 - 2) = 360°$
b) Tiene 12 lados. Entonces, $180° \cdot (12 - 2) = 1\,800°$
c) Tiene 8 lados. Entonces, $180° \cdot (8 - 2) = 1\,080°$
d) Tiene 9 lados. Entonces, $180° \cdot (9 - 2) = 1\,260°$

12.56 Contesta a las siguientes preguntas sobre un decágono.

a) ¿En cuántos triángulos se puede dividir?
b) A partir del resultado anterior, ¿cuánto miden sus ángulos?

a) En 2 unidades menos que el número de lados que tiene. Por tanto, en 8 triángulos.
b) Sus ángulos miden: $180° \cdot (10 - 2) = 1\,440°$

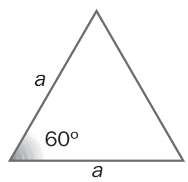
12.57 Clasifica según su suma los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

Al ser un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos mide 90°, y la suma de los otros dos ángulos agudos es 90°, luego son complementarios.

12.58 Un triángulo tiene dos lados iguales y uno de los ángulos mide 60°. ¿Se puede afirmar que es un triángulo equilátero?

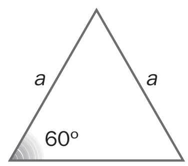
Si el ángulo que forman los lados iguales mide 60°, entonces los ángulos de la base miden lo mismo: $\widehat{A} \Rightarrow 180° = 60° + 2 \cdot \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$

Por tanto, el triángulo es equilátero.



Si tiene dos lados iguales, los ángulos de la base han de ser iguales, y si uno de ellos es el de 60°, el otro también debe medir 60°. Entonces, el tercer ángulo también es de 60°.

Por tanto, el triángulo también es equilátero.



12.59 En un triángulo se sabe que un ángulo es igual a la suma de los otros. ¿Qué clase de triángulo es?

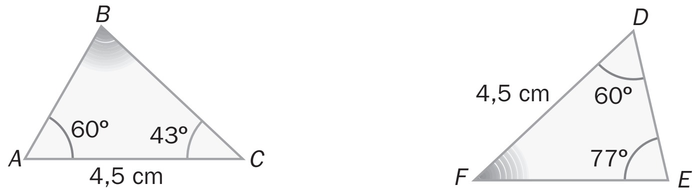
Sean $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ los tres ángulos.
Como $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$ y $180° = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow 180° = 2\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = \dfrac{180°}{2} = 90°$. Luego el triángulo es rectángulo.

Igualdad de polígonos

12.60 **¿Son iguales los siguientes romboides? ¿Por qué?**

Sí son iguales porque tienen los lados y los ángulos iguales.

12.61 **Estudia si son iguales los siguientes triángulos.**



En el triángulo *ABC* se conocen un lado y los dos ángulos contiguos.

Si en el triángulo *DEF* un lado y los dos ángulos contiguos coincidieran con el anterior, serían iguales según el tercer criterio de igualdad.

En *DEF* se conocen dos ángulos. Se puede hallar el tercero:

$$60° + 77° + \widehat{F} = 180° \Rightarrow \widehat{F} = 180° - 60° - 77° \Rightarrow \widehat{F} = 43°$$

Entonces, en *DEF*, el lado conocido y los ángulos contiguos a él coinciden con los de *ABC*. Por tanto, son iguales.

12.62 **El lado de un triángulo mide 48 milímetros, y sus ángulos contiguos, 35° y 80°. En otro, un lado mide 0,48 decímetros, y el ángulo opuesto, 65°. ¿Se puede afirmar que son iguales?**

El lado conocido mide lo mismo, 0,48 dm = 48 mm. Veamos si miden lo mismo los ángulos contiguos.

$180° = \widehat{A} + \widehat{B} + 65° \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 115°$; entonces, en el segundo triángulo, entre los dos ángulos desconocidos suman 115°, pero eso no significa que uno sea de 35° y otro de 80°, podrían ser también de 40° y de 75°.

En ese caso, los ángulos contiguos al lado conocido no coincidirían.

Por tanto, no se puede afirmar que sean iguales.

Simetrías en las figuras planas

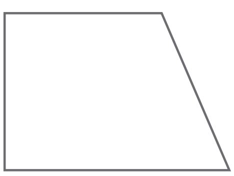
12.63 **En un rectángulo, ¿son ejes de simetría sus diagonales? ¿Hay algún eje de simetría?**

– No son ejes de simetría sus diagonales.
– Sí las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos.

12.64 **Dibuja las siguientes figuras y señala, si los tienen, los ejes de simetría.**

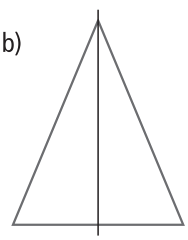
a) Trapecio rectángulo. **b) Triángulo isósceles.**

a)

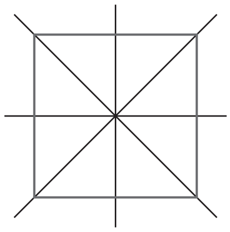


No tiene ejes de simetría.

b)



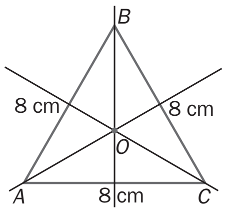
12.65 Dibuja un cuadrado y traza en él todos sus ejes de simetría. ¿Por qué punto pasan todos ellos?



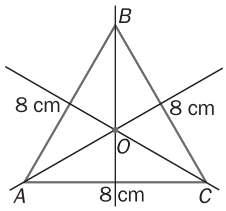
Pasan todos por el centro del cuadrado.

Rectas y puntos de un triángulo

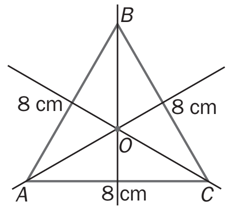
12.66 Dibuja un triángulo equilátero de 8 centímetros de lado y traza en él las mediatrices, bisectrices, medianas y alturas. Señala los puntos de corte correspondientes. ¿Qué observas?



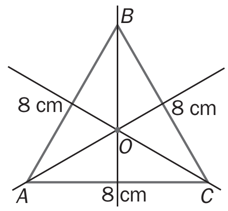
Mediatrices
O Circuncentro



Bisectrices
O Incentro



Alturas
O Ortocentro



Medianas
O Baricentro

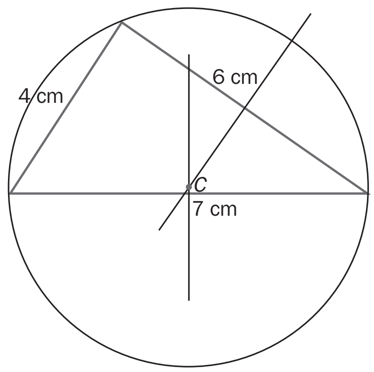
Se observa que el circuncentro, el incentro, el ortocentro y el baricentro son el mismo punto, *O*.

12.67 Los lados de un triángulo miden 6, 4 y 7 centímetros.

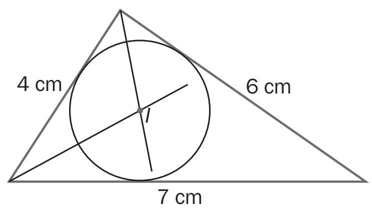
a) Dibuja una circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo. ¿Cuál es el centro?

b) Traza la circunferencia que es tangente a los tres lados.

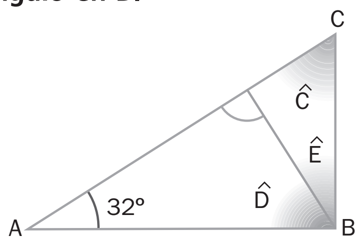
a) El centro de la circunferencia es el circuncentro (punto de corte de las mediatrices), y el radio es la distancia del centro a uno de los vértices del triángulo.



b) El centro de la circunferencia es el incentro (punto de corte de las bisectrices), y el radio es la distancia del centro a uno de los lados del triángulo.



12.68 El triángulo de la figura es rectángulo en *B*.



Calcula los ángulos indicados con letras.

M es el punto donde se interseca la altura desde *B*, con el segmento *AC*.

ABM y *BMC* son triángulos rectángulos.

En *ABM*: $\widehat{D} + 32° + 90° = 180° \Rightarrow \widehat{D} = 180° - 32° - 90° = 58° \Rightarrow \widehat{D} = 58°$

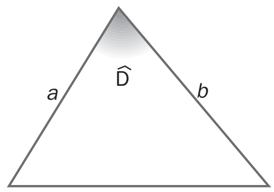
En *ABC*, $\widehat{D}$ y $\widehat{E}$ son complementarios: $\widehat{D} + \widehat{E} = 90° \Rightarrow \widehat{E} = 90° - 58° = 32° \Rightarrow \widehat{E} = 32°$

En *BMC*, $\widehat{E}$ y $\widehat{C}$ son complementarios: $\widehat{E} + \widehat{C} = 90° \Rightarrow \widehat{C} = 90° - 32° = 58° \Rightarrow \widehat{C} = 58°$

PROBLEMAS PARA APLICAR

12.69 Para dibujar un terreno con forma triangular se han medido dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos. ¿Es suficiente con esas medidas para tener determinado el terreno?

Sí es suficiente con esos datos para determinar el triángulo, basta unir los dos extremos de los lados.



12.70 Explica si son iguales las siguientes figuras.

a) Dos triángulos equiláteros.

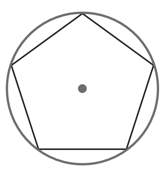
b) Dos triángulos rectángulos de catetos 3 centímetros.

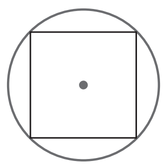
a) No son iguales, porque aunque tengan los ángulos iguales, los lados pueden ser distintos.

b) Sí, porque se verifica el segundo criterio de igualdad de los triángulos.

12.71 A Ana le gusta mucho el diseño y va a hacer una colección de colgantes y pulseras que llamará *Geometría regular*. No sabe si le gusta más el tamaño que tienen si están inscritos en una circunferencia de 10 milímetros de radio o si su lado mide 10 milímetros, y probará con un pentágono regular y un cuadrado para elegir los más pequeños.
¿Cuáles elegirá?

Dibujar las figuras en la circunferencia circunscrita de 10 mm de radio para hallar la longitud del lado:

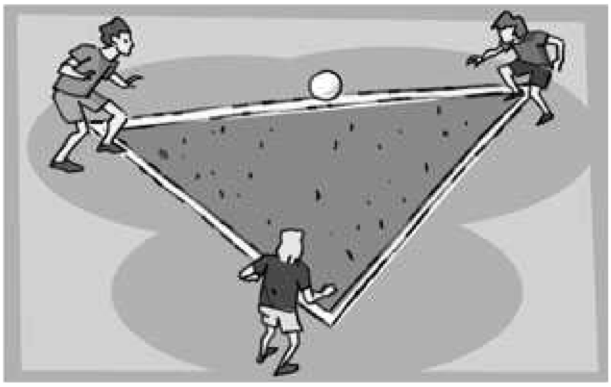




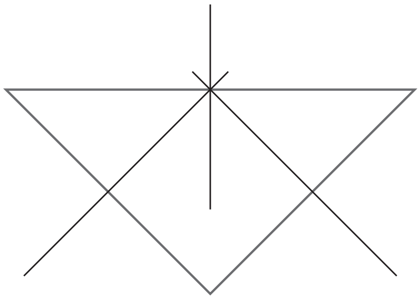
El lado del pentágono es 1,16 cm. El lado del cuadrado es 1,40 cm.

Son más pequeños si los hace de 10 mm de lado.

12.72 Observa el dibujo. Halla el punto donde hay que colocar la pelota para que esté a la misma distancia de los tres jugadores. ¿Cómo se llama ese punto?



El punto que se encuentra a la misma distancia de los jugadores es el punto del triángulo que está a la misma distancia de los tres vértices, es decir, donde se cortan las tres mediatrices, el circuncentro.



12.73 La profesora de Matemáticas propone un juego a sus alumnos. Tienen que adivinar qué polígono dibuja en un papel sabiendo solamente la suma de los ángulos interiores del mismo. ¿Qué polígonos ha dibujado en cada caso?

a) La suma de los ángulos es 180°.

b) La suma de los ángulos es 360°.

c) La suma de los ángulos es 720°.

La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es: $180° \cdot (n - 2)$

a) $180° \cdot (n - 2) = 180° \Rightarrow n - 2 = \frac{180°}{180°} \Rightarrow n = 3$, el polígono es un triángulo.

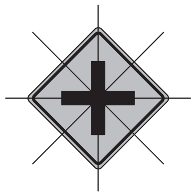
b) $180° \cdot (n - 2) = 360° \Rightarrow n - 2 = \frac{360°}{180°} \Rightarrow n - 2 = 2 \Rightarrow n = 4$, el polígono es un cuadrilátero.

c) $180° \cdot (n - 2) = 720° \Rightarrow n - 2 = \frac{720°}{180°} \Rightarrow n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$, el polígono es un hexágono.

12.74 Dos pintores van a pintar una pared triangular y tienen los dos la misma cantidad de pintura. ¿Cómo tienen que repartirse la pared para que los dos pinten la misma superficie?

Se dibuja la mediana por un vértice cualquiera, y así el triángulo queda dividido en dos regiones de igual superficie.

12.75 **Laura ha ido con sus padres a Nueva York y dice que allí las señales de tráfico no son iguales que las de España. La profesora enseña a la clase algunas de ellas.**



Estudia los polígonos y los ejes de simetría que aparecen en estas señales.

Las cuatro señales son cuadrados.
Se comprueba que cada eje divide las figuras en dos partes iguales.

12.76 **Los abuelos de Pablo tienen un prado sin cercar en forma triangular y un caballo. Quieren atar el caballo de modo que desde un punto pueda ir lo más lejos posible, alcanzando solamente a dos lados del prado pero sin pacer la hierba de la vecina.**

a) ¿Dónde tienen que colocar la estaca?

b) Haz la construcción correspondiente.

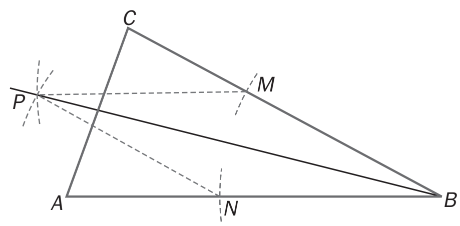
a) La estaca pueden colocarla en cualquier punto de cualquier bisectriz, ya que equidista de los lados.

b) Trazado de la bisectriz:

Con centro en *B*, trazamos con el compás dos segmentos iguales *BM* y *BN* sobre los lados.

Con el centro en los puntos *M* y *N* y radio *BM*, trazamos sendos arcos que se cortan en un punto *P*.

La recta *BP* es la bisectriz.



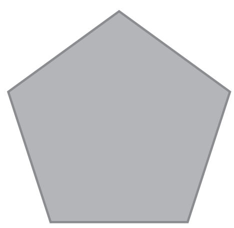
R E F U E R Z O

Polígonos

12.77 **Clasifica los siguientes polígonos según el número de lados, convexidad y regularidad.**

a)

b)



a) Hexágono irregular cóncavo.

b) Pentágono regular convexo.

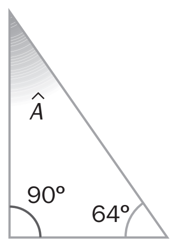
12.78 **Completa el cuadro poniendo SÍ o NO en las casillas vacías.**

	Rombo	Romboide
Los 4 lados son iguales		
Los 4 ángulos son iguales		
Es un paralelogramo		

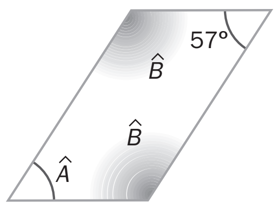
	Rombo	Romboide
Los 4 lados son iguales	SÍ	NO
Los 4 ángulos son iguales	NO	NO
Es un paralelogramo	SÍ	SÍ

12.79 **Halla el valor de los ángulos que faltan en los polígonos.**

a)



b)



a) $\widehat{A} = 57°$ porque los dos ángulos están formados por lados paralelos.

Como la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°, entonces:

$\widehat{B} + \widehat{B} + 57° + 57° = 360° \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{B} = 360° - 57° - 57° \Rightarrow 2 \cdot \widehat{B} = 246° \Rightarrow \widehat{B} = \dfrac{246°}{2} = 123°$

b) La suma de los ángulos de un pentágono es: $180° \cdot (5 - 2) = 540°$

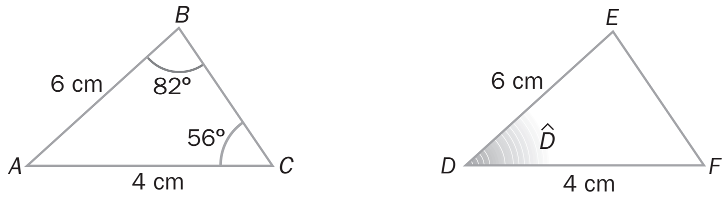
$\widehat{A} + 129° + 111° + 80° + 141° = 540° \Rightarrow \widehat{A} = 540° - 461° = 79° \Rightarrow \widehat{A} = 79°$

Igualdad de polígonos

12.80 **Estudia si son iguales estos cuadriláteros.**

Los dos tienen los lados iguales y los ángulos iguales. Por tanto, son iguales.

12.81 **¿Cuánto debe valer el ángulo $\widehat{D}$ para que los dos triángulos sean iguales?**



Por el 2.° criterio de igualdad de triángulos: dos triángulos son iguales si tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos; por tanto, para que sean iguales los triángulos se debe verificar que $\widehat{D} = \widehat{A}$.

Calculamos: $\widehat{A}$: $\widehat{A} + 82° + 56° = 180° \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 138° = 42° \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{A} = 42°$

Rectas y puntos en un triángulo

12.82 **En un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 centímetros y el ángulo que forman 100° traza:**

a) La mediatriz del lado desigual.

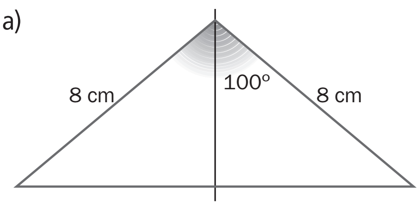
b) La bisectriz del ángulo desigual.

c) La altura sobre el lado desigual.

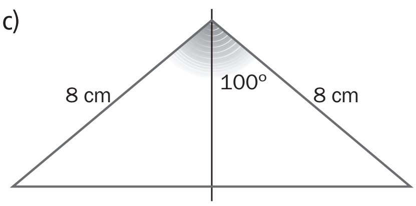
d) La mediana sobre el lado desigual.

e) ¿Cómo son las cuatro rectas trazadas?

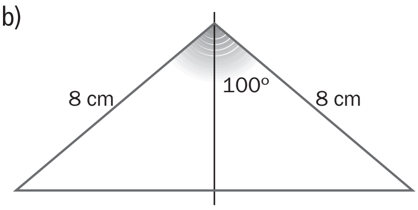
a)



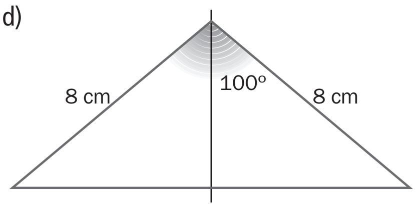
c)



b)



d)



e) Todas las rectas coinciden.

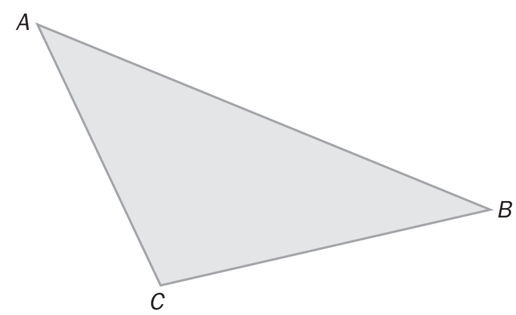
12.83 Copia en tu cuaderno el siguiente triángulo.

a) Señala los puntos medios de los lados.

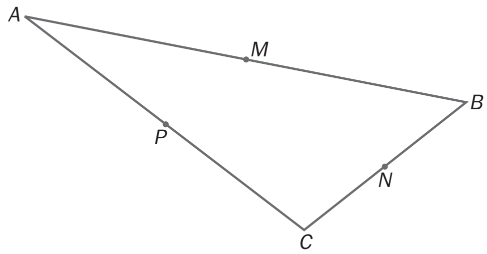
b) Une los puntos medios formando un nuevo triángulo.

c) Traza las medianas de los dos triángulos. ¿Cómo son?

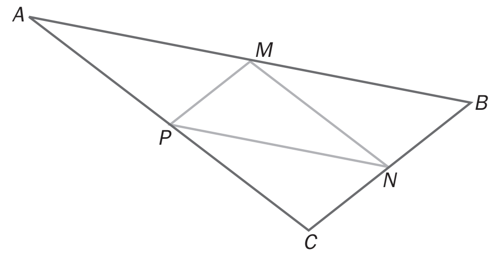
d) Señala el baricentro.



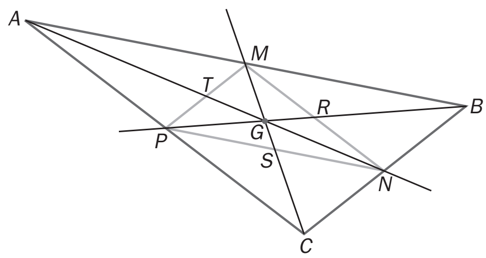
a)



b)

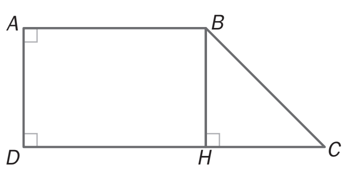


c) y d)



Las medianas de los dos triángulos coinciden. Por tanto, el baricentro, *G*, también.

12.84 En un trapecio rectángulo se sabe que la altura es igual a la diferencia de las bases. ¿Cuánto miden sus ángulos?



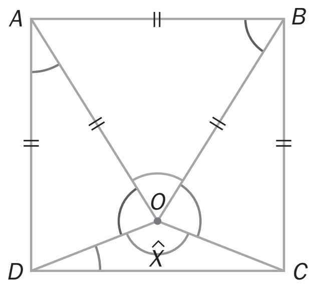
En el trapecio de la figura, $BH = HC$, puesto que la altura es igual a la diferencia de las bases.

Como el triángulo *BCH* es rectángulo isósceles, $\widehat{C} = 45°$

La suma de todos los ángulos es 360°, entonces: $\widehat{B} + 90° + 90° + 45° = 360°$

Por tanto: $\widehat{B} = 360° - 225° = 135°$

12.85 **En un cuadrado se construyen cuatro triángulos, uno equilátero y los otros tres isósceles, tal como se indica en la figura. Calcula la medida del ángulo $\widehat{X}$.**



***Indicación*: Los lados cortados con el signo (II) son iguales.**

El triángulo *AOB* es equilátero, de modo que sus ángulos miden 60°.

Los triángulos *AOD* y *BOC* son isósceles. Por tanto, tienen dos ángulos iguales e iguales entre sí.

En esos triángulos, $\widehat{A} = \widehat{B} = 90° - 60° = 30°$.

Como entre los tres ángulos deben sumar 180° y los otros dos son iguales, esos valen: $\dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$ cada uno.

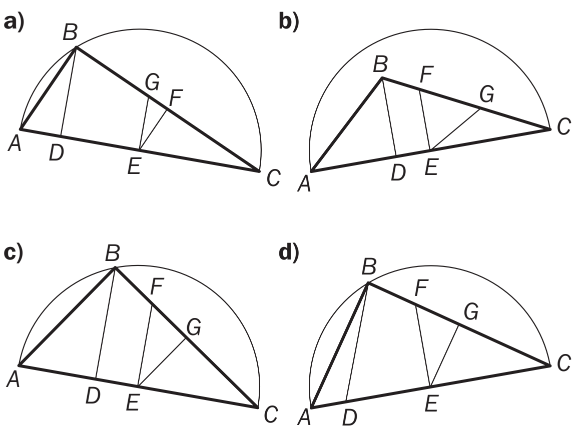
En el punto *O* se conocen tres de los ángulos que aparecen en la figura: 60°, 75° y 75°. Falta $\widehat{X}$.

Como entre todos suman una vuelta completa, 360°: $\widehat{X} = 360° - (60° + 75° + 75°) \Rightarrow \widehat{X} = 150°$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

12.86 **Muchas condiciones**

Dadas las siguientes figuras:



Indica si verifican o no cada una de las siguientes condiciones:

1. **El triángulo *ABC* es rectángulo en *B*.**
2. ***BD* es una altura del triángulo *ABC*.**
3. ***EF* es un segmento contenido en una mediatriz del triángulo *ABC*.**
4. ***GE* es perpendicular a *CB* en su punto medio.**
5. ***E* es el circuncentro del triángulo *ABC*.**

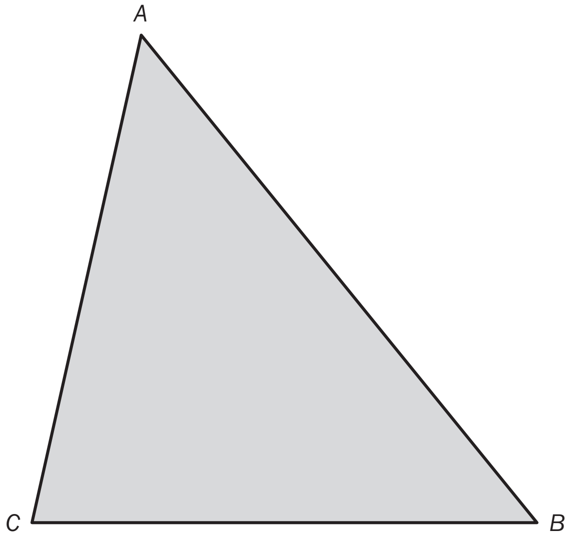
a) No verifica la condición 4.ª

b) No verifica la condición 1.ª, 4.ª y 5.ª

c) Verifica todas las condiciones

d) No verifica la condición 2.ª

12.87 **La recta de Euler**

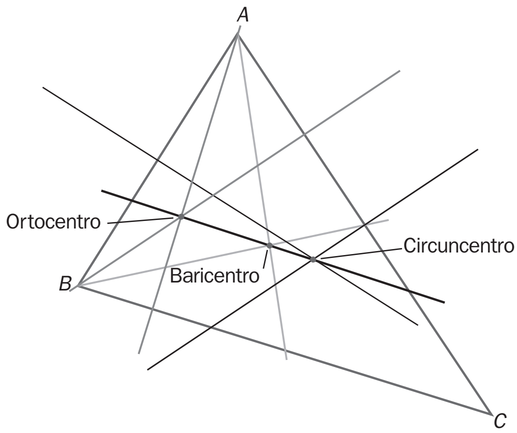


a) Mide las dimensiones de este triángulo y cópialo en tu cuaderno.

b) Halla el baricentro, el ortocentro y el circuncentro del triángulo de la figura. ¿Qué observas?

c) Compara las distancias del baricentro y el circuncentro al ortocentro. ¿Qué observas?

a)

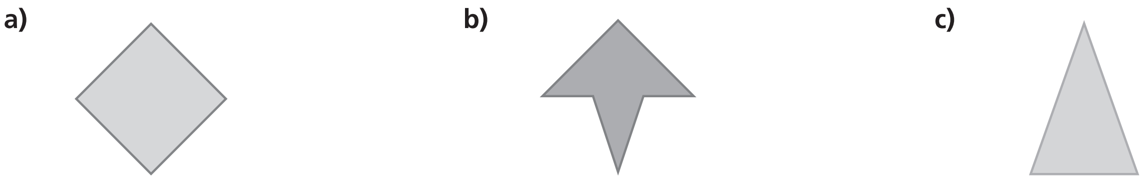


b) Los tres puntos están alineados.

c) La distancia del baricentro al ortocentro es dos tercios la del circuncentro al ortocentro.

AUTOEVALUACIÓN

12.A1 **Clasifica, según los ángulos y los lados los siguientes polígonos.**



a) Cuadrilátero convexo.

b) Hexágono cóncavo.

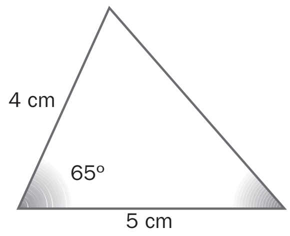
c) Triángulo convexo.

12.A2 Construye un triángulo sabiendo que dos de sus lados miden 5 y 4 centímetros y el ángulo que forman es de 63°. ¿Qué tipo de triángulo se obtiene?

Se dibuja el ángulo con el transportador. A partir de su vértice y sobre cada uno de sus lados se dibujan los segmentos de 4 y 5 centímetros.

Se unen los extremos de los segmentos y se obtiene el triángulo.

Resulta un triángulo escaleno porque la medida del tercer lado no coincide con ninguno de los dos dados.



12.A3 Se trazan todas las diagonales desde uno de los vértices de un polígono de 11 lados.

a) ¿Cuántos triángulos se obtienen?

b) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de ese polígono?

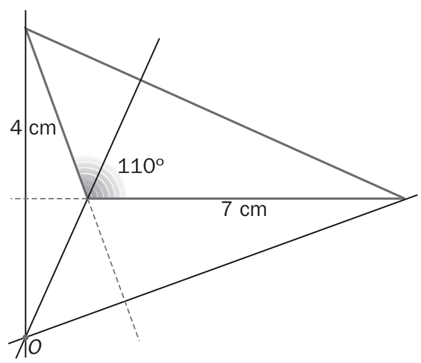
a) Se obtienen 2 unidades menos que el número de lados del polígono.

Por tanto: $11 - 2 = 9$ triángulos

b) La suma es: $180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot (11 - 2) = 180° \cdot 9 = 1\,620°$

12.A4 Dos lados de un triángulo miden 4 y 7 centímetros y forman un ángulo de 110°. Traza las alturas y halla el ortocentro.

Se dibuja el triángulo y se trazan las alturas a los lados (perpendiculares a los lados que pasan por el vértice opuesto). Pero como el triángulo es obtusángulo, para trazar las alturas hay que prolongar dos de sus lados. El ortocentro queda en el exterior del triángulo.



12.A5 De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo agudo mide 18°. ¿Cuánto mide el otro?

Como entre los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°, el otro mide: $90° - 18° = 72°$

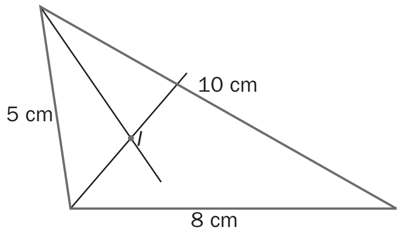
12.A6 **En un triángulo de lados 5, 8 y 10 centímetros.**

a) Halla el incentro.

b) Traza una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

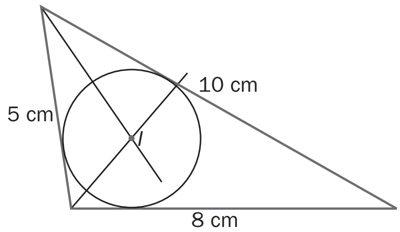
a) El incentro es el punto de corte de las bisectrices.

Es suficiente con trazar dos de ellas.



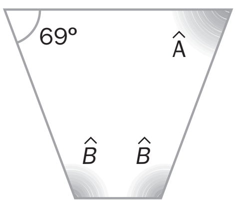
b) La circunferencia tiene el centro en el incentro, y

el radio es la distancia de este a un lado del triángulo.

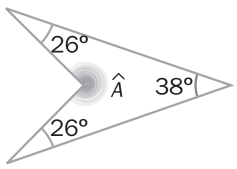


12.A7 **Calcula los ángulos que faltan en estas figuras.**

a)



b)



a) Como es un trapecio isósceles, $\widehat{A} = 69°$.

Por tratarse de un cuadrilátero, la suma de sus ángulos debe ser 360°, y como los dos conocidos suman 138°, se obtiene:

$$\widehat{B} + \widehat{B} = 360° - 138° \quad \Rightarrow \quad \widehat{B} + \widehat{B} = 222° \quad \Rightarrow \quad \widehat{B} = \frac{222°}{2} = 111°$$

b) Como es un cuadrilátero, la suma de sus ángulos debe ser 360°.

Los conocidos suman: $360° = \widehat{A} + 26° + 38° + 26° \Rightarrow \widehat{A} = 360° - 90° = 270° \Rightarrow \widehat{A} = 270°$

Jugando con las matemáticas

TRIÁNGULOS MÁGICOS

Corta dos veces el triángulo de la figura de forma que, juntando las piezas resultantes, obtengas un rectángulo.

Se corta el triángulo por los segmentos *DE* y *DF*, donde *D* y *E* son los puntos medios de los lados *AB* y *BC*, respectivamente, y *DF* es perpendicular a *AC*. Colocamos las partes formando el rectángulo pedido.