10 Polígonos y circunferencia

Historias de sobremesa

Cada vez que Farkas Bolyai y su hijo se juntaban, el tema predilecto de conversación eran las matemáticas, y siempre salía a relucir el nombre de Gauss.

–Janos –le decía a su hijo–, el 29 de marzo de 1796 debería instaurarse como festivo para todos los matemáticos del mundo.

¡Otra vez la vieja historia del heptadecágono! Janos miró a su padre con una sonrisa.

–Gauss tiene suerte de contar con amigos como tú.

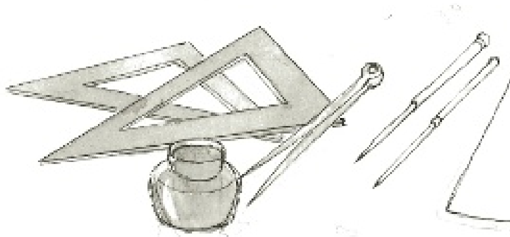
El padre, sin prestar atención, continuó con la historia:

–Él mismo me lo contó, después de uno de nuestros paseos por los alrededores de Göttingen.

Hizo una pausa y en voz baja continuó:

–El día 29, después de encontrar la forma de construir el polígono regular de 17 lados solamente con ayuda de la regla y el compás, tomó la decisión de estudiar matemáticas en detrimento de la filosofía.

Este descubrimiento fue tan importante para Gauss que el epitafio de su sepultura contiene un heptadecágono regular.



DESCUBRE LA HISTORIA…

1 **¿Quiénes fueron Farkas Bolyai y Janos Bolyai? ¿Qué relación tienen con Gauss? ¿Cuáles son las circunstancias que les llevaron a enemistarse?**

Una biografía de Farkas y Janos Bolyai se encuentran en las páginas:

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/BolyaiJF.asp

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Bolyai.asp

En este enlace se trata la relación entre Gauss y los Bolyai:

http://ific.uv.es/rei/Historia/bolyai.html

2 **¿Por qué Farkas Bolyai piensa que el 29 de marzo debería ser festivo para los matemáticos?**

En esta página puedes encontrar la respuesta:

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Gauss2.asp

3 **Busca información sobre Friedrich Gauss y sus importantes aportaciones a la geometría.**

Esta se centra en las aportaciones de Gauss a la Geometría:

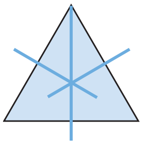
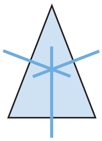
http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/No%20euclidianas/Capitulo_04/Cap_04_01.htm

Un tratado sobre la geometría no euclídea se puede encontrar en:

http://www.monografias.com/trabajos6/axeu/axeu.shtml

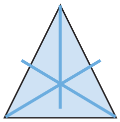
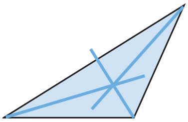
EVALUACIÓN INICIAL

1 **Dibuja las mediatrices de los lados de estos triángulos. ¿Se cortan las tres mediatrices en algún punto?**

a)  **b)** 

Siempre se cortan en un punto (circuncentro).

2 **Dibuja las bisectrices de los ángulos de estos triángulos. ¿Se cortan las tres bisectrices en algún punto?**

a)  **b)** 

En ambos casos, siempre se cortan en un punto (incentro).

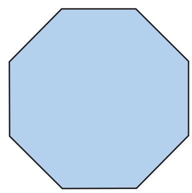
3 **Completa.**

a) $\sqrt{25} = \boxed{5}$, **porque** $5^2 = \boxed{25}$ **b)** $4^2 = \boxed{16}$, **entonces** $\sqrt{16} = \boxed{4}$

Polígonos y circunferencia

EJERCICIOS

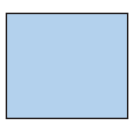
001 **Dibuja este polígono en tu cuaderno. Señala sus lados, vértices, ángulos interiores y diagonales. ¿Cuántas diagonales tiene?**

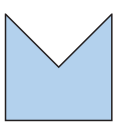


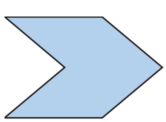
Tiene 20 diagonales.

El número de diagonales de un polígono de n lados es igual a $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

002 **Determina cuáles de estos polígonos son regulares o irregulares, cóncavos o convexos.**

a) 

b) 

c) 

a) Regular convexo

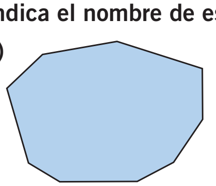
b) Irregular cóncavo

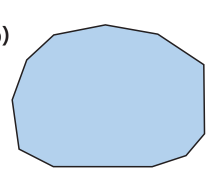
c) Irregular cóncavo

003 **Un polígono, ¿puede tener más vértices que lados?**

Un polígono tiene el mismo número de lados que de vértices.

004 **Indica el nombre de estos polígonos.**

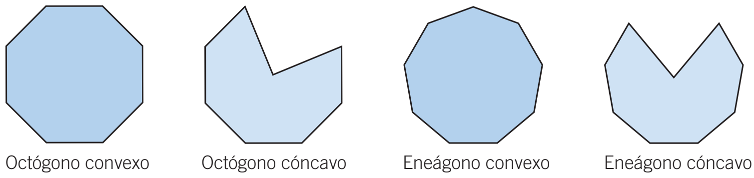
a) 

b) 

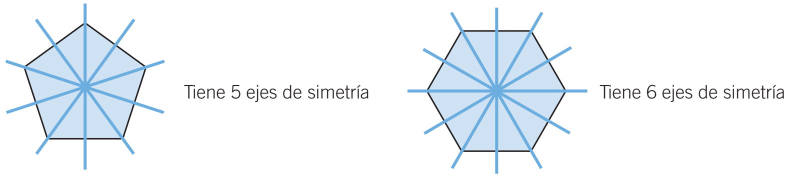
a) Eneágono

b) Endecágono

005 **Dibuja un octógono convexo y otro cóncavo. Haz lo mismo con un eneágono.**



006 **Calcula el número de ejes de simetría que tienen un pentágono regular y un hexágono regular.**



007 **Indica si existe un triángulo cuyos lados miden:**

a) 15, 8 y 20 cm

b) 2, 4 y 14 cm

a) Sí existe, porque la medida de los lados verifica las relaciones.

$15 < 8 + 20 \qquad 8 < 15 + 20 \qquad 20 < 15 + 8$

$15 > 20 - 8 \qquad 8 > 20 - 15 \qquad 20 > 15 - 8$

b) No existe, porque $14 > 2 + 4$.

008 **En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 30°. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos?**

$180° - (90° + 30°) = 180° - 120° = 60°$

Los otros dos ángulos miden 90° y 60°.

009 **El ángulo obtuso de un triángulo isósceles obtusángulo mide 120°. ¿Cuánto miden los otros ángulos del triángulo isósceles?**

La suma de los ángulos iguales es: $180° - 120° = 60°$

Cada ángulo mide: $60° : 2 = 30°$

010 **Calcula el ángulo obtuso de un triángulo isósceles, si uno de sus ángulos agudos mide 40°.**

$180° - 2 \cdot 40° = 100°$ mide el ángulo obtuso.

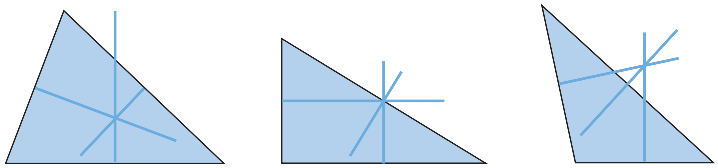
Polígonos y circunferencia

011 **Dibuja tres triángulos: uno acutángulo, otro rectángulo y un tercero obtusángulo.**

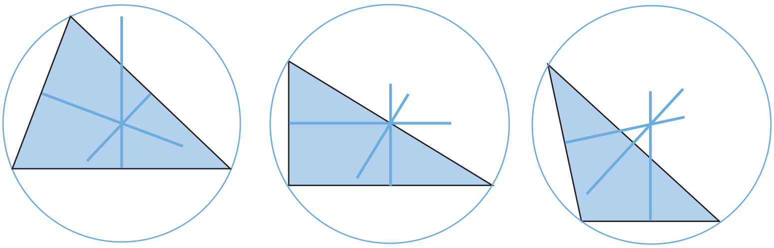
a) Traza las mediatrices de los triángulos y señala, en cada caso, su circuncentro.

b) Comprueba con el compás que el circuncentro está a la misma distancia de los tres vértices.

a)

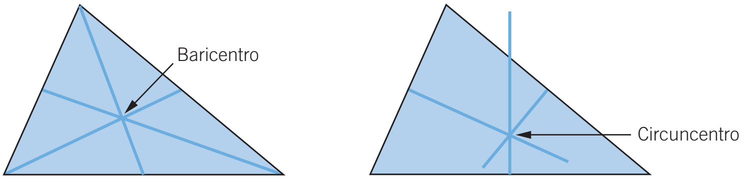


b)

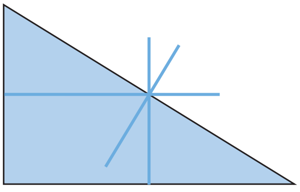


012 **Dibuja en tu cuaderno un triángulo cualquiera. Halla su baricentro y su circuncentro.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

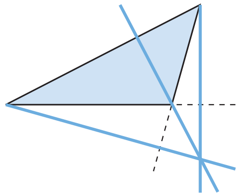


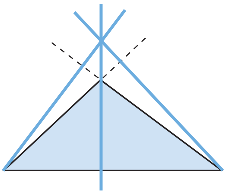
013 **En un triángulo rectángulo, dibuja sus mediatrices y señala su circuncentro. ¿Qué observas?**



En un triángulo rectángulo, el circuncentro está situado en el punto medio de la hipotenusa.

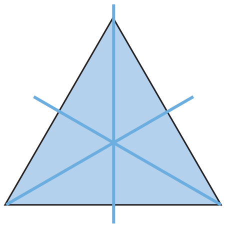
014 **Dibuja varios triángulos obtusángulos, traza sus alturas y halla su ortocentro. ¿Dónde se encuentra situado?**





En un triángulo obtusángulo, el ortocentro está situado en el exterior del triángulo.

015 **Dibuja en un triángulo equilátero sus mediatrices, bisectrices, alturas y medianas. Comprueba que todas coinciden.**



En un triángulo equilátero coinciden sus alturas, bisectrices, mediatrices y medianas.

016 **Razona las respuestas.**

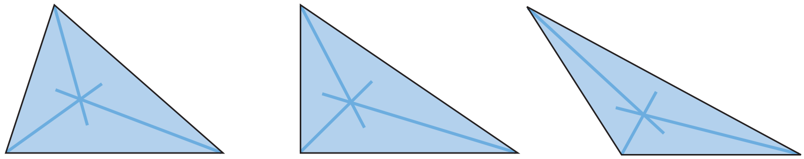
a) ¿El incentro de un triángulo puede estar situado en el exterior del mismo?

b) ¿Y sobre uno de sus lados?

Compruébalo, dibujando varios triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, y hallando este punto.

a) No, porque el incentro es el centro de la circunferencia inscrita, que está en el interior del triángulo, luego su centro también lo está.

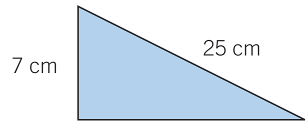
b) No, por la misma razón del apartado anterior.



017 **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 y 12 cm, respectivamente. ¿Cuánto medirá la hipotenusa?**

Hipotenusa $= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm

018 **En un triángulo rectángulo, un cateto mide 7 cm y la hipotenusa 25 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?**



Cateto $= \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24$ cm

019 **Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 8 cm y 15 cm. Mide con la regla la hipotenusa y, después, aplica el teorema de Pitágoras para comprobar el resultado.**

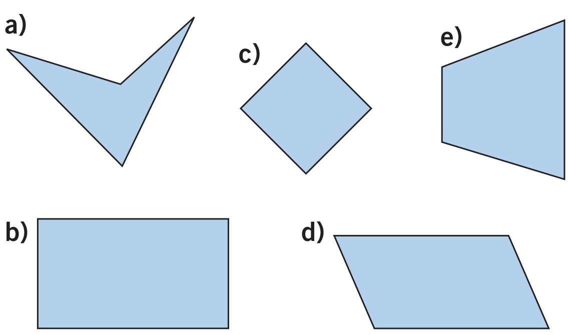
Se comprueba con la regla que la hipotenusa mide 17 cm.

Hipotenusa $= \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$ cm

020 **¿Se puede dibujar un triángulo con dos ángulos rectos? ¿Por qué?**

No, porque la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°, y como $90° + 90° = 180°$, el tercer ángulo tendría que valer 0°, lo cual no es posible.

021 **Clasifica estos cuadriláteros, e indica si son cóncavos o convexos.**



a) Trapezoide cóncavo

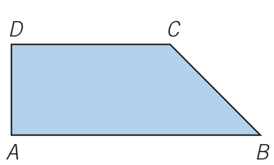
b) Rectángulo convexo

c) Cuadrado convexo

d) Romboide convexo

e) Trapecio convexo

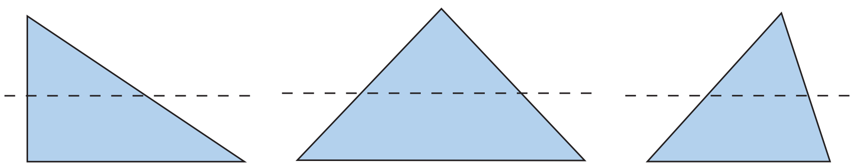
022 **Calcula la medida de $\widehat{C}$ en este trapecio rectángulo, sabiendo que $\widehat{B} = 45°$ y que la suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero es 360°.**



El ángulo $\widehat{C}$ mide:

$360° - (90° + 90° + 45°) = 135°$

023 **Dibujamos un triángulo rectángulo, uno isósceles y otro escaleno, y los cortamos por una recta paralela a la base. ¿Qué polígonos obtenemos en cada caso?**



En el triángulo rectángulo se obtienen un triángulo rectángulo y un trapecio rectángulo; en el triángulo isósceles se obtienen un triángulo isósceles y un trapecio isósceles; y en el triángulo escaleno se obtienen un triángulo escaleno y un trapecio escaleno.

024 **Determina lo que miden los ángulos de un paralelogramo que tiene un ángulo de 80°.**

Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales, luego su ángulo opuesto mide también 80°, y como la suma de los ángulos de un paralelogramo mide 360° se obtiene:

$$360° - (80° + 80°) = 200° \qquad 200° : 2 = 100°$$

Los ángulos del paralelogramo miden 80°, 80°, 100° y 100°.

025 **Halla la diagonal de un rectángulo de lados 3 cm y 4 cm.**

$$\text{Diagonal} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

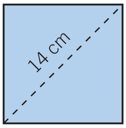
026 **Calcula la diagonal mayor de un rombo de lado 50 cm y diagonal menor 28 cm.**

$$\text{Diagonal mayor} = 2 \cdot \sqrt{50^2 - 14^2} = 2 \cdot \sqrt{2\,304} = 2 \cdot 48 = 96 \text{ cm}$$

027 **Indica la medida del lado de un rombo cuyas diagonales miden 16 cm y 30 cm.**

$$\text{Lado del rombo} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$$

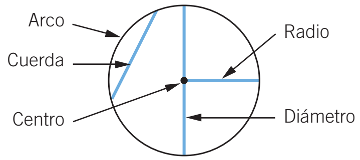
028 **Calcula el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 14 cm.**



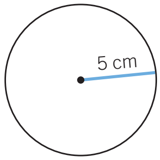
$$l^2 + l^2 = 14^2 \rightarrow 2 \cdot l^2 = 196 \rightarrow l^2 = 98 \rightarrow l = \sqrt{98} = 9{,}9 \text{ cm}$$

El lado del cuadrado mide 9,9 cm.

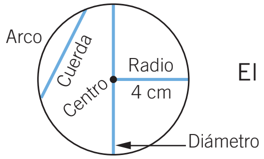
029 **Indica el nombre de cada uno de los elementos de la siguiente circunferencia:**



030 **Dibuja una circunferencia de radio 5 cm.**



031 **Dibuja una circunferencia de radio 4 cm, y señala sobre ella un diámetro, un radio, un arco y una cuerda. ¿Cuánto mide el diámetro?**

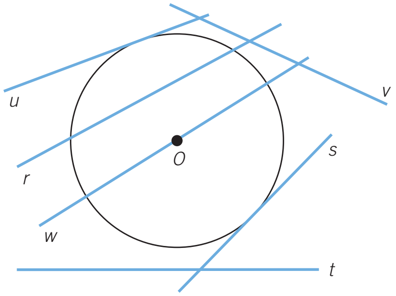


El diámetro de la circunferencia mide: $2 \cdot 4 = 8$ cm

032 **Fíjate en la rueda de este carro. Indica qué elementos de la circunferencia observas.**

Se pueden observar estos elementos: el radio, el diámetro y el centro de una circunferencia y los arcos entre los radios.

033 **Indica cuál es la posición relativa de cada una de las rectas respecto de la siguiente circunferencia:**



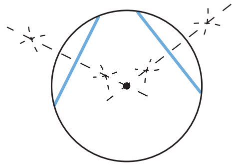
Secantes: r y w.
Tangentes: u y s.
Exteriores: v y t.

034 **Deduce la posición relativa de una circunferencia de radio *r* y una recta que se halla a una distancia *d* de su centro, en los siguientes casos.**

a) $r = 6$ cm, $d = 4$ cm
b) $r = 6$ cm, $d = 6$ cm
c) $r = 4$ cm, $d = 6$ cm
d) $r = 4$ cm, $d = 0$ cm

a) Secante b) Tangente c) Exterior d) Secante

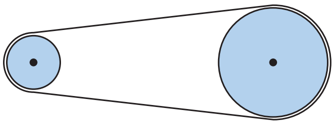
035 **Con una moneda o un vaso, dibuja en tu cuaderno una circunferencia. ¿Sabrías indicar su centro?**



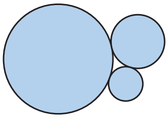
Para averiguar el centro, se trazan dos cuerdas y sus mediatrices, el punto de corte de ambas coincide con el centro de la circunferencia.

036 **Indica la posición relativa de las circunferencias: la polea de la cadena de una bicicleta y la maquinaria interna de un reloj.**

a)

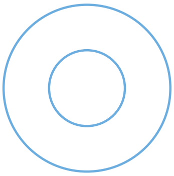


b)

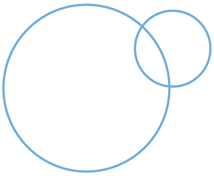


a) Exteriores b) Tangentes exteriores

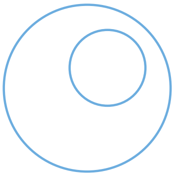
037 **Dadas dos circunferencias de radios 6 y 3 cm, respectivamente, dibuja en tu cuaderno todas sus posibles posiciones.**



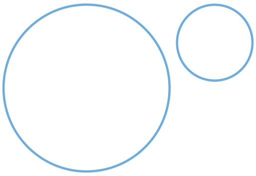
Concéntricas



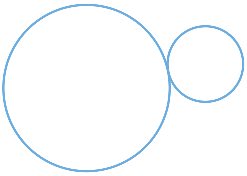
Secantes



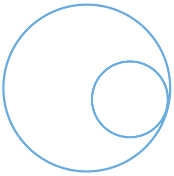
Interiores



Exteriores



Tangentes exteriores



Tangentes interiores

038 **Tenemos dos circunferencias, una de radio 3 cm y otra de radio 4 cm. La distancia entre los centros de estas circunferencias es de 4 cm.**

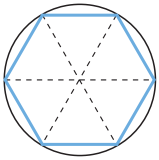
a) ¿Pueden ser tangentes exteriores? ¿Y tangentes interiores?

b) ¿Qué posición relativa ocupan?

a) No pueden ser tangentes exteriores porque no cumplen la condición de que: $d = r + r'$, ni tangentes interiores porque no cumplen que: $d = r - r'$.

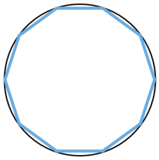
b) Son secantes, porque se cumple que: $d < r + r'$ (4 cm < 6 cm + 3 cm).

039 **Traza un hexágono regular inscrito en una circunferencia. Después, traza los tres diámetros que unen sus vértices opuestos. ¿En cuántos triángulos queda descompuesto el hexágono? Comprueba que todos los triángulos formados son equiláteros.**



Se divide en 6 triángulos equiláteros iguales. La longitud de los lados de todos los triángulos es el radio.

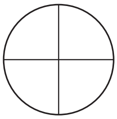
040 **Si divides una circunferencia en diez partes y unes cada par de puntos, ¿qué polígono se forma?**



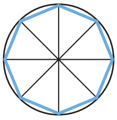
Se obtiene un decágono.

041 **¿Cómo podrías dibujar un octógono regular?**

1.º Traza una circunferencia y, en ella, dos diámetros perpendiculares.

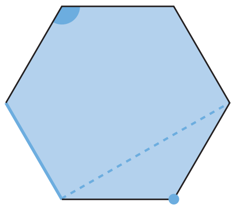


2.º Traza las bisectrices de los cuatro ángulos rectos formados y une los ocho puntos de división.



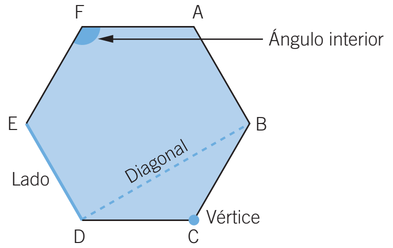
ACTIVIDADES

042 Indica el nombre de cada uno de los elementos del polígono.



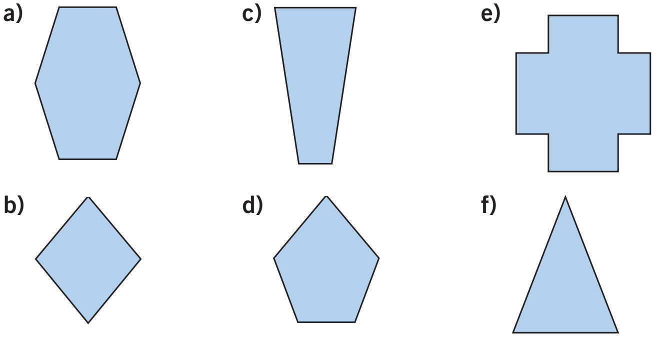
a) Señala sus vértices.
b) ¿Cuántos lados tiene?
c) ¿Cuántas diagonales puedes dibujar?
d) ¿Cuántos ángulos tiene?
e) ¿Cómo se llama este polígono?
f) ¿Es regular? ¿Por qué?
g) ¿Es cóncavo o convexo?

a)



b) 6 lados.
c) 9 diagonales.
d) 6 ángulos.
e) Hexágono.
f) Es regular, porque sus lados y sus ángulos son iguales.
g) Es convexo.

043 Indica el nombre de estos polígonos según su número de lados.

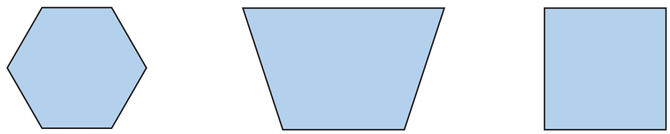


a) Hexágono
b) Cuadrilátero
c) Cuadrilátero
d) Pentágono
e) Dodecágono
f) Triángulo

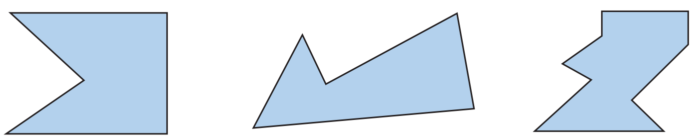
Polígonos y circunferencia

044 Traza tres polígonos que sean convexos y otros tres que sean cóncavos.

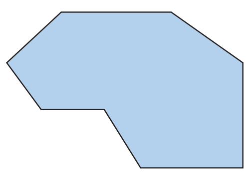
Polígonos convexos



Polígonos cóncavos



045 Dibuja la siguiente figura en tu cuaderno.



a) ¿Cuántos lados tiene?

b) Por su número de lados, ¿qué nombre recibe?

c) Dibuja sus diagonales. ¿Cuántas tiene?

d) Señala sus ángulos. ¿Cuántos tiene?

e) Calcula la suma de sus ángulos interiores.

f) Halla el valor de cada uno de esos ángulos. ¿Se puede calcular?

a) Tiene 8 lados.

b) Octógono.

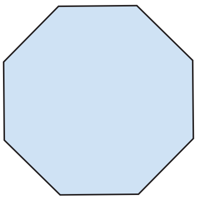
c) 20 diagonales.

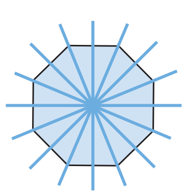
d) 8 ángulos.

e) $180° \cdot (8 - 2) = 1\,080°$

f) No se puede calcular, porque el octógono no es regular.

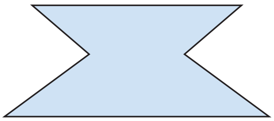
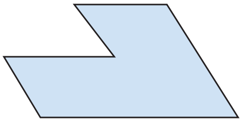
046 Calca este octógono regular. ¿Cuántos ejes de simetría tiene?

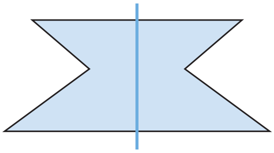




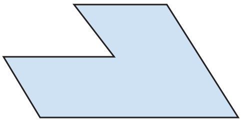
8 ejes de simetría

047 **Determina los ejes de simetría.**

a)  **b)** 

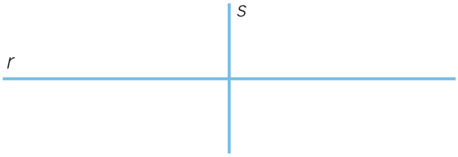
a) 

Tiene 1 eje de simetría.

b) 

No tiene ejes de simetría.

048 **Estas rectas son ejes de simetría de un rectángulo.**

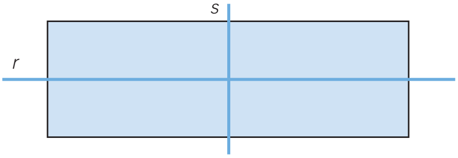


a) Dibuja ese rectángulo.

b) ¿Cuántos rectángulos cumplen esta condición?

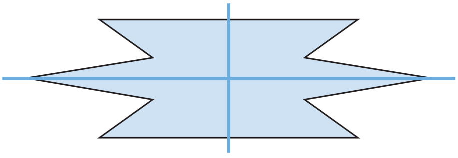
c) ¿Puedes dibujar un polígono de más de cuatro lados cuyos ejes de simetría sean *r* y *s*?

a) Por ejemplo:



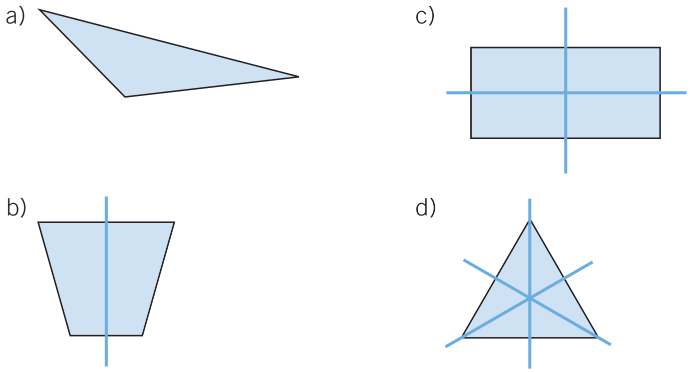
b) Las cumplen todos los rectángulos que tengan los lados paralelos a las dos rectas y sean equidistantes a ellas.

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:



049 **Dibuja un polígono que:**

a) No tenga ejes de simetría.
b) Tenga un solo eje de simetría.
c) Tenga dos ejes de simetría.
d) Tenga tres ejes de simetría.

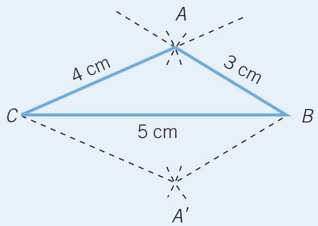


050 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DIBUJA UN TRIÁNGULO CONOCIENDO LA MEDIDA DE SUS LADOS?

Construye un triángulo con lados $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $c = 3$ cm.

PRIMERO. Se traza un segmento igual a un lado, *a*. Los extremos son los vértices *C* y *B*.

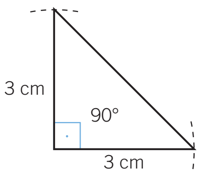


SEGUNDO. Se construyen dos arcos, uno con centro en *C* y radio *b*, y otro con centro en *B* y radio *c*.

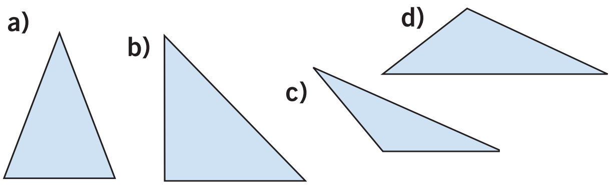
TERCERO. Se unen *B* y *C* con los dos puntos de intersección de los arcos. Se obtienen dos triángulos, siendo ambos solución.

051 **Construye un triángulo rectángulo e isósceles cuyos catetos midan 3 cm.**

Trazamos un segmento de 3 cm.
En uno de sus extremos construimos otro segmento perpendicular al primero de 3 cm.
Unimos los extremos libres de los segmentos.



052 Clasifica estos triángulos según sus lados y ángulos.



Determina el número de ángulos agudos, rectos y obtusos que tiene cada uno.

a) Isósceles acutángulo. Tiene los tres ángulos agudos.

b) Escaleno rectángulo. Tiene un ángulo recto y dos agudos.

c) Isósceles obtusángulo. Tiene un ángulo obtuso y dos agudos.

d) Escaleno obtusángulo. Tiene un ángulo obtuso y dos agudos.

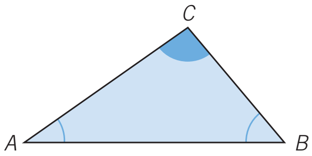
053 **En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 45°. ¿Cuánto miden los otros ángulos?**

$180° - (45° + 90°) = 180° - 135° = 45°$. Miden 90° y 45°.

054 **En un triángulo, dos de sus ángulos miden 20° y 70°, respectivamente. ¿Cuánto mide el tercer ángulo? ¿Cómo se llama el triángulo?**

$180° - (20° + 70°) = 90°$ mide el tercer ángulo.
El triángulo es rectángulo.

055 **¿Cuál es la medida del ángulo $\hat{C}$ en el triángulo $\widehat{ABC}$ si $\hat{A} = 35° \, 32' \, 30''$ y $\hat{B} = 50° \, 50'$?**



$180° - (35° \, 32' \, 30'' + 50° \, 50') = 180° - 86° \, 22' \, 30'' = 93° \, 37' \, 30''$

El ángulo $\hat{C}$ mide $93° \, 37' \, 30''$.

056 **Un triángulo isósceles tiene el ángulo desigual de 50°. ¿Cuánto miden los ángulos iguales?**

$180° - 50° = 130°$

$130° : 2 = 65°$ mide cada ángulo igual.

057 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINA SI SE PUEDE CONSTRUIR UN TRIÁNGULO CON TRES SEGMENTOS DADOS?

¿Se puede dibujar un triángulo cuyos lados miden 5, 6 y 16 cm, respectivamente?

PRIMERO. Se estudia si cualquiera de los lados es menor que la suma de los otros dos.

$a = 5$ cm $\qquad b = 6$ cm $\qquad c = 16$ cm

$a < b + c$	$b < a + c$	$c < a + b$
$5 < 6 + 16$ $5 < 22$	$6 < 5 + 16$ $6 < 21$	$16 \not< 5 + 6$ $16 \not< 11$

SEGUNDO.

- Si se cumplen las tres desigualdades,las medidas determinan un triángulo.
- En caso contrario, no se puede construir un triángulo con esos tres segmentos.

En este caso, no se cumple una desigualdad: $16 \not< 5 + 6$; por tanto, no existe un triángulo de lados 5, 6 y 16 cm.

058 **Analiza, en cada caso, las medidas y averigua con cuáles se puede formar un triángulo.**

a) $a = 8$ **cm,** $b = 7$ **cm,** $c = 1$ **cm**

b) $a = 6$ **cm,** $b = 6$ **cm,** $c = 13$ **cm**

c) $a = 12$ **cm,** $b = 14$ **cm,** $c = 6$ **cm**

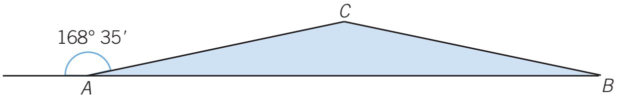
a) $8 \not< (7 + 1) = 8$. No se cumple, luego no se puede formar un triángulo.

b) $13 \not< 6 + 6 = 12$. No se cumple, por lo que no se puede formar un triángulo.

c) $12 < 14 + 6 \qquad 14 < 12 + 6 \qquad 6 < 12 + 14$

Se cumplen las condiciones; por tanto, se puede formar un triángulo.

059 **El ángulo exterior de un triángulo isósceles, como el de la figura, mide 168° 35′. Calcula el valor de los tres ángulos del triángulo.**



$\widehat{A} = 180° - 168° 35' = 11° 25'$

$\widehat{B} = 11° 25'$

$\widehat{C} = 180° - (11° 25' + 11° 25') = 157° 10'$

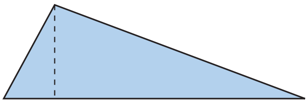
060 **¿Cuál será el valor de los ángulos en un triángulo equilátero?**

$180° : 3 = 60°$ mide cada ángulo de un triángulo equilátero.

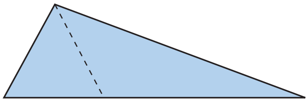
061 **Un triángulo rectángulo, ¿puede ser equilátero? ¿Por qué?**

No puede ser equilátero, porque cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60° y un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90°.

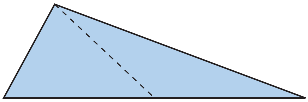
062 **Escribe en tu cuaderno el nombre de las rectas notables dibujadas en los triángulos.**

a) 

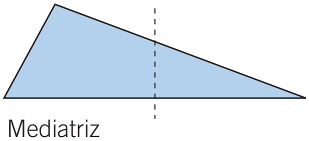
Altura

c) 

Bisectriz

b) 

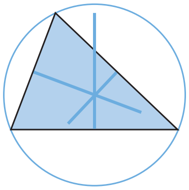
Mediana

d) 

Mediatriz

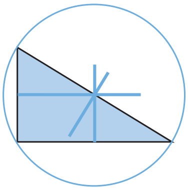
063 **Dibuja tres triángulos: uno acutángulo, otro rectángulo y otro obtusángulo. Determina sus circuncentros. ¿Cómo son respecto a cada uno de los triángulos?**

Acutángulo



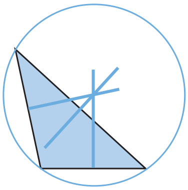
Interior

Rectángulo



Sobre la hipotenusa

Obtusángulo



Exterior

064 **Construye varios triángulos rectángulos y calcula su ortocentro. ¿Qué observas?**

En un triángulo rectángulo, el ortocentro es el vértice del ángulo recto.

065 **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 12 y 16 cm, respectivamente. Calcula la hipotenusa.**

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm}$$

066 **En un triángulo rectángulo, un cateto mide 21 cm y la hipotenusa 75 cm. Halla el otro cateto.**

$$\text{Cateto} = \sqrt{75^2 - 21^2} = 72 \text{ cm}$$

067 **En un triángulo rectángulo isósceles, los catetos miden 12 cm. Determina el valor de la hipotenusa.**

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 16{,}97 \text{ cm}$$

068 **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 25 y 60 cm, respectivamente. Calcula la hipotenusa.**

Hipotenusa $= \sqrt{25^2 + 60^2} = 65$ cm

069 **Indica si los siguientes triángulos son rectángulos o no. Si no lo son, calcula el valor de la hipotenusa para que lo sean.**

a) Lados: 12, 16 y 20 cm.

b) Lados: 5, 6 y 13 cm.

c) Lados: 18, 24 y 32 cm.

a) $20^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow 400 = 144 + 256$. Se cumple, luego es un triángulo rectángulo.

b) $5 + 6 < 13 \rightarrow$ No forman un triángulo, ni rectángulo ni de ninguna otra clase.

Hipotenusa $= \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} = 7{,}81$ cm

c) $32^2 \neq 18^2 + 24^2 \rightarrow 1\,024 \neq 324 + 576$.
No se cumple; por tanto, no es un triángulo rectángulo.

Hipotenusa $= \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{900} = 30$ cm

070 **Calcula la diagonal de un cuadrado sabiendo que el lado mide 8 cm.**

Diagonal $= \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 11{,}31$ cm

071 **Determina el lado de un cuadrado si la diagonal mide 7 cm.**

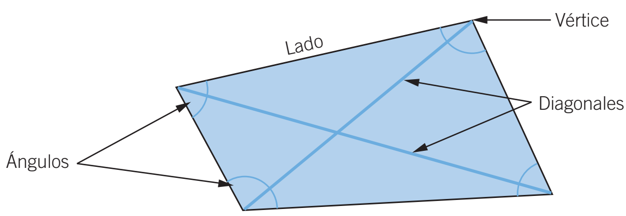
$$7^2 = l^2 + l^2 \rightarrow 49 = 2 \cdot l^2 \rightarrow \frac{49}{2} = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\frac{49}{2}} = 4{,}95 \text{ cm}$$

El lado del cuadrado mide 4,95 cm.

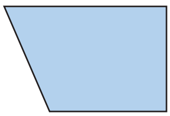
072 **Calcula la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 10 cm.**

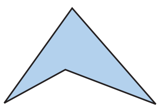
Altura $= \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66$ cm

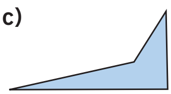
073 **Dibuja un cuadrilátero, señala las diagonales, los vértices, los ángulos y los lados.**

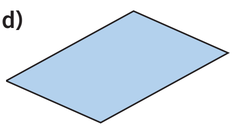


074 Clasifica los siguientes cuadriláteros en función del paralelismo de sus lados. Di si son cóncavos o convexos.

a) 

b) 

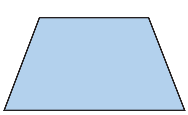
c) 

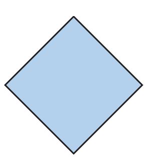
d) 

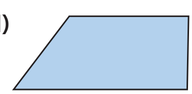
a) Trapecio convexo
b) Trapezoide cóncavo
c) Trapezoide cóncavo
d) Paralelogramo convexo, romboide

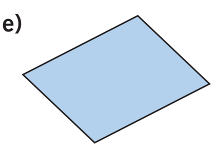
075 Clasifica estos cuadriláteros en función de sus ángulos y del paralelismo de sus lados.

a) 

b) 

c) 

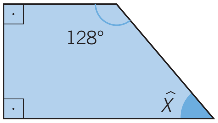
d) 

e) 

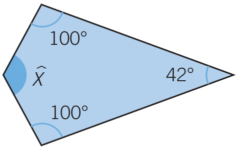
a) Rectángulo
b) Trapecio isósceles
c) Cuadrado
d) Trapecio rectángulo
e) Romboide

076 Calcula el ángulo que falta en cada uno de los cuadriláteros.

a)



b)



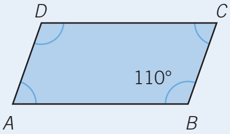
a) $\widehat{X} = 360° - (90° + 90° + 128°) = 52°$

b) $\widehat{X} = 360° - (100° + 100° + 42°) = 118°$

077 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN LOS ÁNGULOS DE UN PARALELOGRAMO?

Halla el valor de todos los ángulos de este paralelogramo.



PRIMERO. Los ángulos contiguos son suplementarios.

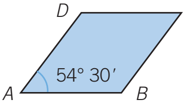
$$\widehat{A} + \widehat{B} = 180° \rightarrow \widehat{A} = 180° - 110° = 70°$$

SEGUNDO. Los ángulos opuestos son iguales.

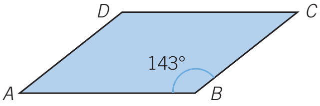
$$\widehat{D} = \widehat{B} = 110° \qquad \widehat{C} = \widehat{A} = 70°$$

078 Halla los ángulos de cada paralelogramo.

a)



b)



a) $\widehat{A} = \widehat{C} = 54°\,30'$

$$\widehat{B} = \widehat{D} = \frac{360° - 54°\,30' - 54°\,30'}{2} = \frac{360° - 109°}{2} = 125°\,30'$$

b) $\widehat{B} = \widehat{D} = 143°$

$$\widehat{A} = \widehat{C} = \frac{360° - 143° - 143°}{2} = \frac{360° - 286°}{2} = 37°$$

079 **Un ángulo de un rombo vale 35°. Determina el valor del resto de ángulos.**

Un rombo tiene los ángulos iguales dos a dos, luego otro ángulo mide 35°.

Cada uno de los dos ángulos restantes medirá: $\dfrac{360° - 70°}{2} = 145°$

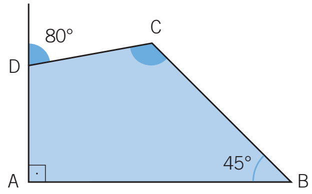
080 **Un trapecio isósceles tiene dos ángulos de 45°. ¿Cuánto valen los otros ángulos?**

$360° - 90° = 270°$

$270° : 2 = 135°$

Los otros ángulos miden 135° cada uno.

081 **Calcula el valor del ángulo $\widehat{C}$ del cuadrilátero.**



$\widehat{D} = 180° - 80° = 100°$

$\widehat{C} = 360° - (90° + 45° + 100°) = 125°$

082 **Indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas.**

a) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, todos sus ángulos son rectos.

b) Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto, tiene al menos otro ángulo recto.

c) Si un cuadrilátero tiene dos diagonales iguales, es un paralelogramo.

d) Hay cuadriláteros que no son paralelogramos y que tiene las diagonales iguales.

e) Un cuadrilátero que no sea paralelogramo puede tener dos ángulos rectos.

f) Un cuadrilátero que no sea paralelogramo puede tener tres ángulos rectos.

a) Verdadera

b) Falsa

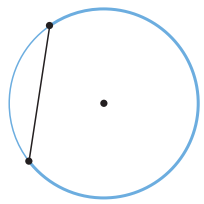
c) Falsa

d) Verdadera

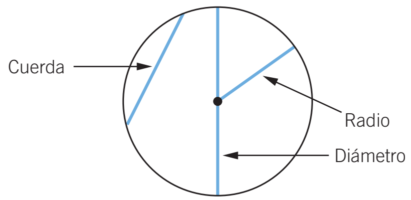
e) Verdadera

f) Falsa

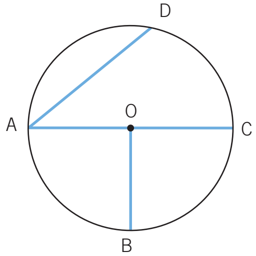
083 Dibuja una circunferencia con un compás. Después, traza una cuerda y señala con colores diferentes los dos arcos que determina.



084 Dibuja una circunferencia de radio 4 cm, y señala en ella un radio, un diámetro y una cuerda.



085 En la circunferencia de la figura se han trazado varios segmentos. Indica el nombre de cada uno de ellos.

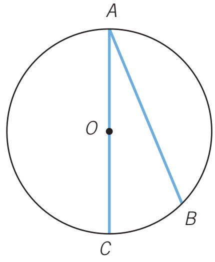


AD → Cuerda

AC → Diámetro

OB, OA y OC → Radios

086 Observa la circunferencia de la figura. Completa y responde.



a) **El segmento *AB* es una…**

b) **El segmento *AC* es un…**

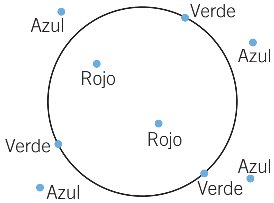
c) **Si los segmentos cortan a dos puntos de la circunferencia, ¿por qué no reciben el mismo nombre?**

a) El segmento *AB* es una cuerda.

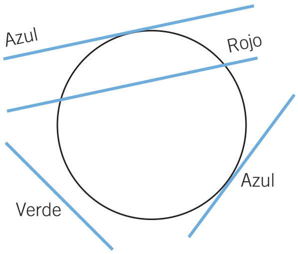
b) El segmento *AC* es un diámetro.

c) Porque el segmento *AC* pasa por el centro y *AB* no.

087 Dibuja una circunferencia y señala dos puntos interiores en rojo, tres puntos de la circunferencia en verde y cuatro puntos exteriores a la circunferencia en azul.



088 Dibuja una circunferencia y señala una recta secante que no pase por el centro de rojo, una recta exterior de verde y dos rectas tangentes a la circunferencia de azul.



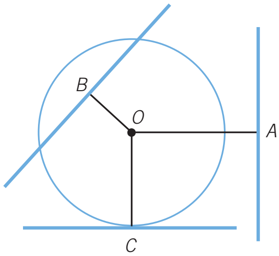
089 En la siguiente circunferencia se han trazado una recta exterior, otra recta secante y una tangente. También se han dibujado los segmentos perpendiculares a las rectas indicadas desde el centro, *O*, de la circunferencia.

Compara los segmentos *OA*, *OB* y *OC* con el radio, *r*, y escribe el signo $<$, $>$ o $=$, según corresponda.

a) *OA* □ *r*

b) *OB* □ *r*

c) *OC* □ *r*

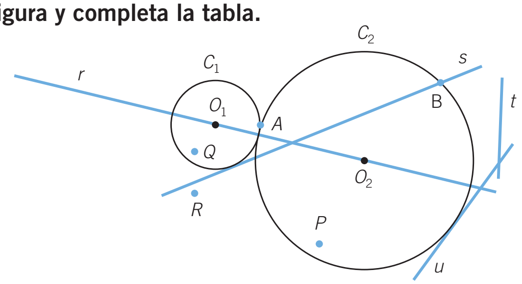


a) $OA > r$

b) $OB < r$

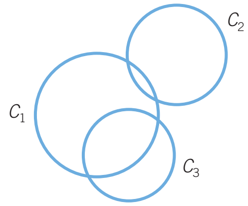
c) $OC = r$

090 Observa esta figura y completa la tabla.



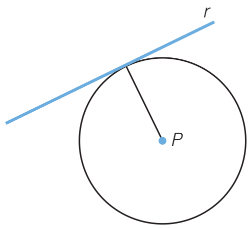
Elemento 1	Elemento 2	Posición relativa
P	C_1	Exterior
P	C_2	Interior
A	C_1	Exterior
A	C_2	Punto de la circunferencia
Q	C_1	Interior
Q	C_2	Exterior
R	C_1	Exterior
R	C_2	Exterior
B	C_1	Exterior
B	C_2	Punto de la circunferencia
r	C_1	Secante
r	C_2	Secante
s	C_1	Tangente
s	C_2	Secante
t	C_1	Exterior
t	C_2	Exterior
u	C_1	Exterior
u	C_2	Tangente
C_1	C_2	Tangentes

091 Observa la figura y señala la posición relativa de las tres circunferencias entre sí.



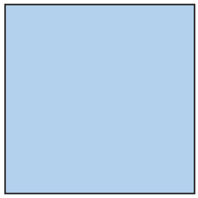
C_1 y C_2 son secantes.
C_1 y C_3 son secantes.
C_2 y C_3 son exteriores.

092 Si la distancia del punto *P* a la recta *r* es 3 cm, ¿cómo podrías trazar una circunferencia de centro *P* que fuese tangente a la recta *r*? ¿Cuál sería el valor del radio?



Trazamos la recta perpendicular a *r* desde el punto *P*.
Después, trazamos la circunferencia de centro *P* y radio 3 cm.
La circunferencia trazada es tangente a la recta, en el punto de corte de la recta con la perpendicular trazada. El valor del radio es 3 cm.

093 Calca el cuadrado de la figura. Traza la circunferencia circunscrita a él.



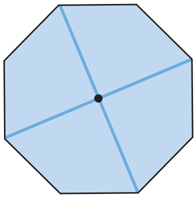
a) **¿Cómo construyes la circunferencia?**

b) **¿Qué relación hay entre el radio de la circunferencia y el lado del cuadrado?**

a) Se trazan las dos diagonales, siendo el punto de corte el centro de la circunferencia circunscrita, y el radio, la mitad de la diagonal.

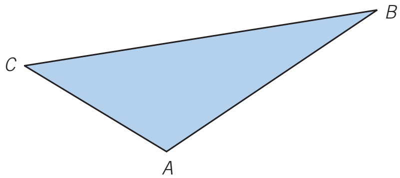
b) $r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{2 \cdot l^2}{4} = \frac{l^2}{2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot l}{2}$

094 Halla el centro del siguiente polígono regular, y explica cómo lo haces.



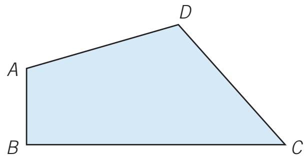
Dibujamos las mediatrices de dos lados o dos diagonales que pasen por vértices opuestos, y el punto de corte es el centro de ambas circunferencias, circunscrita e inscrita.

095 ¿Puedes dibujar la circunferencia circunscrita a este triángulo? Indica el proceso.



Dibujamos las mediatrices de los lados, y el punto de corte es el centro de la circunferencia circunscrita, y el radio, la distancia a cualquiera de los vértices.

096 ¿Puedes circunscribir una circunferencia a este cuadrilátero? ¿Por qué?

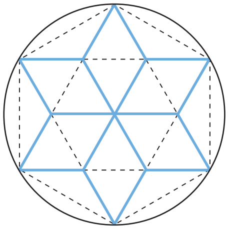


No es posible, ya que las mediatrices no se cortan en un punto.

097 ¿Puede inscribirse cualquier polígono en una circunferencia? ¿Y todos los polígonos regulares?

No es posible para cualquier polígono; es necesario que las mediatrices de sus lados se corten en un único punto. Los polígonos regulares cumplen esta condición, luego se pueden inscribir en una circunferencia.

098 Esta figura se ha obtenido trazando las diagonales de un hexágono regular. Construye en tu cuaderno una figura igual, con una circunferencia de 6 cm de radio.



Construimos un hexágono regular tomando como longitud del lado, el radio de la circunferencia.

099 ¿Cuánto vale la apotema de un cuadrado? ¿Y de un hexágono regular?

La apotema de un cuadrado vale la mitad del lado.

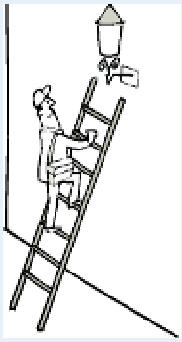
En un hexágono regular, tomamos el triángulo equilátero de lado x igual al lado del hexágono. La apotema es la altura, y aplicando el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. La apotema vale $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot$ lado.

100 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS MEDIANTE EL TEOREMA DE PITÁGORAS?

Calcula la longitud de una escalera si está apoyada en la pared a una distancia de 1,8 m y sube hasta una altura de 7 m.



PRIMERO. Se hace un gráfico que aclare la situación.

Si se considera que el ángulo que forman la pared y el suelo es un ángulo recto, será un triángulo rectángulo en el que se conocen sus dos catetos.

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras.

$$l^2 = (1,8)^2 + 7^2 = 52,24$$

$$l = \sqrt{52,24} = 7,23 \text{ m}$$

La escalera mide 7,23 m.

101 **Una escalera de 5 m apoyada en la pared, tiene su pie a 1,5 m de la base de la pared. ¿A qué altura llegará la escalera?**

$h = \sqrt{5^2 - 1,5^2} = \sqrt{22,75} = 4,77$ m de altura llegará la escalera.

102 **Calcula la longitud de la diagonal de una parcela rectangular de un terreno si sus dimensiones son 150 y 60 m, respectivamente.**

$\sqrt{150^2 + 60^2} = \sqrt{26\,100} = 161,55$ m mide la diagonal de la parcela.

103 **En un jardín rectangular de 8 × 5 m, determina cuántos metros recorre un niño que lo cruza siguiendo la diagonal.**

Diagonal $= \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9,43$ m recorre el niño.

104 **Halla la altura de un triángulo isósceles con dos lados iguales de 12 cm y un lado desigual de 16 cm.**

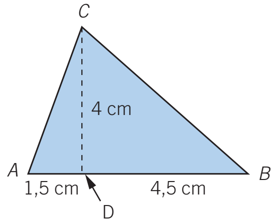
Calculamos la altura sobre el lado desigual:

$$h = \sqrt{12^2 - 8^2} = 8,94 \text{ cm}$$

Podemos calcular las otras dos alturas utilizando la fórmula del área:

$$\frac{16 \cdot 8,94}{2} = \frac{12 \cdot h}{2} \rightarrow h = \frac{16 \cdot 8,94}{12} = 11,92 \text{ cm}$$

105 **Calcula la dimensión de todos los lados de un triángulo como el de la figura.**

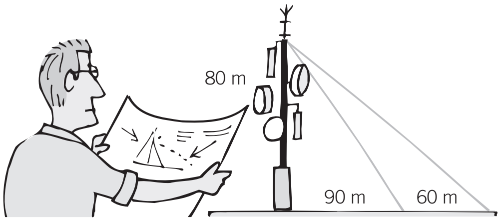


$$AC = \sqrt{4^2 + 1,5^2} = \sqrt{18,25} = 4,27 \text{ cm}$$

$$CB = \sqrt{4^2 + 4,5^2} = \sqrt{36,25} = 6,02 \text{ cm}$$

$$AB = 1,5 + 4,5 = 6 \text{ cm}$$

106 Un arquitecto quiere colocar dos cables para sujetar una torre de comunicaciones. Observa la figura y calcula la longitud de los cables.



Cable corto $= \sqrt{80^2 + 90^2} = \sqrt{14\,500} = 120{,}41$ m

Cable largo $= \sqrt{80^2 + 150^2} = \sqrt{28\,900} = 170$ m

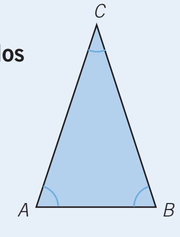
107 Luisa quiere pasar, por una puerta de altura 2 m y ancho 1 m, un tablero de madera de más de 2 m de longitud. No puede pasarlo de pie y tiene que hacerlo inclinándolo. ¿Cuál es la máxima longitud que puede tener el tablero para poder hacerlo?

Diagonal de la puerta $= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2{,}23$ m es la máxima longitud que puede tener.

108 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS GEOMÉTRICOS CON ECUACIONES?

El ángulo desigual de un triángulo isósceles es la mitad de cada uno de los otros dos. Calcula el valor de los tres ángulos del triángulo.



PRIMERO. Se define la incógnita.

Si se llama x a la medida de los ángulos iguales, $\frac{x}{2}$ será la medida del ángulo desigual.

SEGUNDO. Se plantea la ecuación.

$$x + x + \frac{x}{2} = 180°$$

TERCERO. Se resuelve la ecuación:

$$x + x + \frac{x}{2} = 180 \rightarrow 2x + \frac{x}{2} = 180$$

y eliminando denominadores:

$$4x + x = 360 \rightarrow 5x = 360 \rightarrow x = 72$$

Por tanto, los ángulos iguales medirán 72° cada uno, y el ángulo desigual $\frac{72°}{2} = 36°$.

CUARTO. Se comprueba la solución.

$$72° + 72° + 36° = 180°$$

109 **En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es triple que el otro. Calcula el valor de los ángulos de este triángulo.**

$$90° + x + 3x = 180° \rightarrow 4x = 180° - 90° = 90° \rightarrow x = 22{,}5°$$

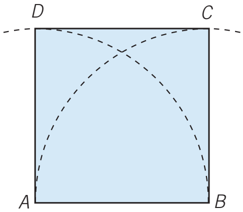
Los ángulos del triángulo miden 22,5°; 67,5° y 90°.

110 **De los tres ángulos de un triángulo, el mayor es triple que el mediano y este es doble que el menor. Halla el valor de los ángulos.**

$x \rightarrow$ Ángulo menor Ángulo mediano $= 2x$ Ángulo mayor $= 3 \cdot 2x = 6x$

$x + 2x + 6x = 180° \rightarrow 9x = 180 \rightarrow x =$ 20° mide el ángulo menor.
40° mide el ángulo mediano.
120° mide el ángulo mayor.

111 **Explica cómo se ha construido este cuadrado:**



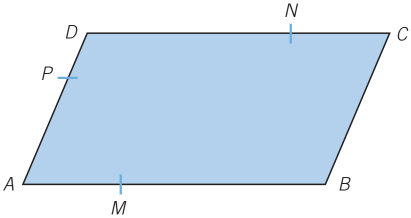
Se traza el segmento *AB* y las perpendiculares en *A* y en *B*. Después, se traza el arco con centro en *A* y longitud hasta *B*, y el arco con centro en *B* y longitud hasta *A*. Los puntos de corte con las perpendiculares son los otros dos vértices del cuadrado.

112 **Construye un cuadrado sabiendo que su diagonal mide 6 cm.**

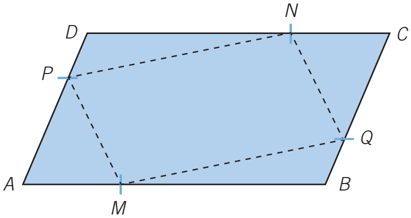
Construimos un segmento de 6 cm. Trazamos otro segmento de 6 cm perpendicular al anterior, y que se corten en sus puntos medios.

Los extremos de los segmentos son los vértices del cuadrado.

113 **En el paralelogramo *ABCD*, *DN* = *BM*. Señala un punto *Q* en el lado *BC*, de modo que *MPNQ* sea otro paralelogramo. Explica cómo lo haces.**



Un paralelogramo tiene los lados paralelos dos a dos, luego para encontrar el punto *Q* se ha de cumplir que $\overline{BQ}$ sea igual que $\overline{PD}$.



114 ●●

Traza dos segmentos paralelos *AB* y *CD* que sean de la misma longitud. Después, une los extremos. ¿Qué tipo de paralelogramo puede ser *ABCD*?

Si la distancia entre los extremos de los distintos segmentos es igual a la longitud de los segmentos:

- Si son perpendiculares a *AC* y *BD*, sería un cuadrado.
- Si no son perpendiculares, sería un romboide.

Si la distancia entre los extremos de los distintos segmentos no es igual a la longitud de los segmentos:

- Si son perpendiculares a *AC* y *BD*, es un rectángulo.
- Si no son perpendiculares, puede ser un rombo o un romboide.

115 ●●●

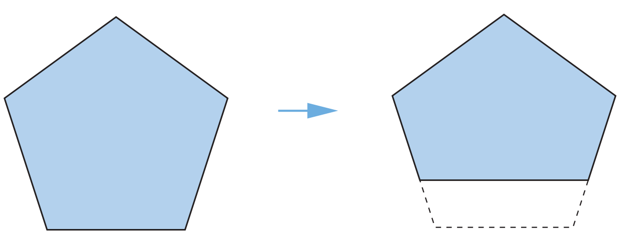
¿Puede haber un polígono de 3, 4, 5, 6… lados, con todos los ángulos iguales, pero que no tenga los lados iguales?

a) Construye y dibuja los polígonos que cumplen esta condición.

b) Explica en qué casos no es posible y por qué.

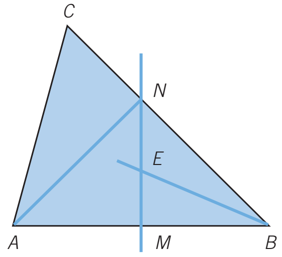
En el caso del polígono de 3 lados no es posible, porque si tiene todos sus ángulos iguales, sus lados han de ser también iguales.

En el resto de polígonos sí es posible; basta con tomar una recta paralela a uno de los lados de un polígono regular y sustituirla por el lado correspondiente, alargando o acortando los lados adyacentes.



116 ●●●

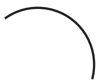
En la figura, *M* es el punto medio del lado *AB*. La mediatriz de *AB* corta a *BC* en *N*, y la bisectriz del ángulo $\hat{B}$ corta a *MN* en *E*. ¿Qué punto notable es *E* en el triángulo $\widehat{ABN}$?



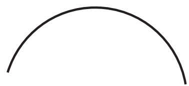
Como *MN* es la mediatriz del segmento *AB*, el triángulo $\widehat{ABN}$ es isósceles y, por tanto, la bisectriz del ángulo $\hat{N}$ coincide con la mediatriz del segmento *AB*. El punto E es el corte de dos bisectrices y, en consecuencia, es el incentro del triángulo $\widehat{ABN}$.

117 ●●● **Traza la circunferencia a la que pertenece cada uno de los siguientes arcos. Para ello señala tres puntos de cada arco.**

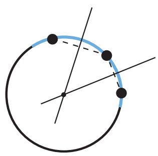
a)



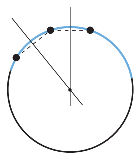
b)



a)

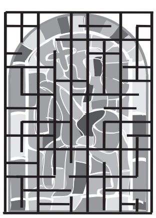


b)



PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

118 ●●● **La iglesia de Villagrande tiene una enorme vidriera cuadrada rematada con un arco, es del siglo XVIII y tiene gran valor artístico.**



El ayuntamiento de la localidad ha decidido protegerla con una malla metálica que impida a las palomas acceder a ella.

Como la malla metálica es casi imperceptible desde el exterior, se ha decidido que sea de forma rectangular y que tape por completo la vidriera.

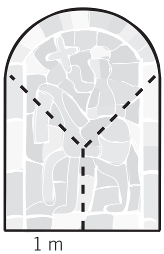
ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Qué relación habrá entre el ancho de la vidriera y el ancho de la malla metálica?

b) Si pudiésemos medir la altura de la vidriera, ¿en qué punto de la base habría que situar la cinta métrica para medirla?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) En los antiguos archivos de la iglesia han encontrado este croquis de la vidriera. ¿Cuánto medirá el radio de la circunferencia que determina el arco de la parte superior de la vidriera?



ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) El herrero encargado de fabricar la malla metálica tiene un trozo de malla cuadrado de 2,25 m de lado. ¿Tendrá malla suficiente para cubrir la vidriera?

a) Deben tener la misma longitud.

b) En el punto medio de la base.

c) Llamamos x al radio del arco que coincide con la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$x = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1{,}4142 \text{ m}$$

d) El rectángulo tiene como dimensiones:

$$\text{base} = 1 + 1 = 2 \text{ m}$$
$$\text{altura} = 1 + 1{,}4142 = 2{,}4142 \text{ m}$$

La malla del herrero no tiene la altura suficiente.

119 **Las dimensiones de un televisor vienen indicadas por la longitud de su diagonal, que se expresa en pulgadas, y para obtener su longitud en centímetros hay que considerar que cada pulgada tiene 2,54 cm.**

Por otro lado, también hay que considerar el formato del televisor. El formato establece la relación que hay entre la altura y el ancho del aparato.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si el televisor es de 32 pulgadas, ¿cuántos centímetros mide su diagonal?

b) Si el televisor tiene un formato 9:16, y en las especificaciones técnicas se indica que mide 46,48 cm de ancho, ¿cuál es su altura?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Calcula las dimensiones de un televisor de 32 pulgadas con formato 9:16.

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Tengo que colocar el televisor en el hueco de un mueble que mide 80 cm de ancho y 60 cm de alto. ¿Puedo tener un televisor de 40 pulgadas con formato 9:16?

a) Diagonal $= 32 \cdot 2{,}54 = 81{,}28$ cm

b) $\left.\begin{array}{l} 9 \text{ cm de alto} \longrightarrow 16 \text{ cm de ancho} \\ x \longrightarrow 46{,}48 \text{ cm de ancho} \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{9 \cdot 46{,}48}{16} = 26{,}145 \text{ cm}$

La altura del televisor es de 26,15 cm, aproximadamente.

c) Llamamos x a la altura del televisor, si el formato es 9:16, entonces su anchura $\dfrac{16 \cdot x}{9}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + \left(\frac{16 \cdot x}{9}\right)^2 = 81{,}28^2 \qquad x^2 + \frac{256x^2}{81} = 6\,606{,}4384$$

$$337x^2 = 535\,121{,}5104 \rightarrow x = \sqrt{\frac{535\,121{,}5104}{337}} = 39{,}85 \text{ cm de altura}$$

$$\text{Anchura} = = \frac{16 \cdot 39{,}85}{9} = 70{,}84 \text{ cm}$$

d) Las medidas de un televisor de 40 pulgadas con formato 9:16 son:

Diagonal $= 40 \cdot 2{,}54 = 101{,}6$ cm

$$x^2 + \left(\frac{16 \cdot x}{9}\right)^2 = 101{,}6^2 \qquad x^2 + \frac{256x^2}{81} = 10\,322{,}56$$

$$337x^2 = 836\,127{,}36 \rightarrow x = \sqrt{\frac{836\,127{,}36}{337}} = 49{,}81 \text{ cm de altura}$$

$$\text{Anchura} = = \frac{16 \cdot 49{,}81}{9} = 88{,}55 \text{ cm}$$

El ancho del televisor, 88,55 cm, sobrepasa el ancho del hueco, 80 cm.