

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-012674

Fecha y hora de registro: 2013-10-08 16:11:13.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es



Autor: Fernando Blasco

Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos.

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF. Wikipedia Commons

Índice

1. EL ESPACIO

- 1.1. EL ENTORNO EN EL QUE NOS MOVEMOS
- 1.2. DIMENSIONES
- 1.3. POLIEDROS, CUERPOS REDONDOS Y OTRAS FIGURAS
- 1.4. ELEMENTOS DEL ESPACIO
- 1.5. REPRESENTACIÓN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

2. POLIEDROS

- 2.1. POLIEDROS REGULARES
- 2.2. PRISMAS
- 2.3. PIRÁMIDES
- 2.4. ÁREAS DE POLIEDROS
- 2.5. VOLÚMENES DE PRISMAS Y PIRÁMIDES



3. CUERPOS REDONDOS

- 3.1. CILINDRO
- 3.2. CONO
- 3.3. ESFERA
- 3.4. SUPERFICIES DE CUERPOS REDONDOS
- 3.5. VOLUMEN DEL CILINDRO Y DEL CONO
- 3.6. VOLUMEN DE LA ESFERA



Resumen

En nuestro día a día, en la vida real, casi nunca encontramos figuras planas, sino que utilizamos objetos tridimensionales.

Una caja de zapatos, una goma de borrar o un paquete de tizas son ejemplos de prismas. El dado del parchís (cubo) o el dado de un juego de rol (icosaedro) son poliedros regulares. De las pirámides no hablamos: las que hay en Egipto son de todos conocidas. Las latas de conservas vegetales y las tizas de colores suelen ser cilíndricas, hay muchos helados con forma de cono y tanto las pelotas como las pompas de jabón tienen forma de esfera.

Nos interesará calcular el volumen de estos cuerpos (para saber cuánto cabe en su interior) y su área (lo que nos permitirá, por ejemplo, estimar la cantidad de pintura necesaria para recubrirlos).

1. EL ESPACIO

1.1. El entorno en que nos movemos

Nuestra vida se desarrolla en un entorno tridimensional: cuando vamos a comprar un mueble medimos tres dimensiones, para ver si nos cabe en casa: alto, ancho y largo. Incluso los objetos “planos”, como una hoja de papel o un DVD en realidad son tridimensionales, pero su altura es muy pequeña y tendemos a considerarlos planos.

A pesar de que en nuestro día a día nos encontramos objetos tridimensionales, es más difícil estudiarlos porque no caben en un libro, a no ser que sea un libro especial con páginas desplegadas (acabamos de decir que las páginas son bidimensionales). Por eso se recurre a fabricar modelos (en plastilina, cartulina, arcilla u otro material) o a utilizar representaciones planas de estos objetos.

Una técnica muy utilizada en matemáticas consiste en aprovechar lo que ya sabemos para aprender los nuevos conceptos. Por ello en este tema nos centraremos fundamentalmente en cuerpos geométricos que se obtienen a partir de figuras planas. Vamos a familiarizarnos con esos objetos.

Actividades resueltas

- ✚ *Observa un dado. ¿Cuántas caras tiene? ¿Qué forma tienen sus caras? Mira ahora un paquete de tizas blancas. ¿Cuántas caras tiene? ¿Qué forma tienen? ¿En qué se parecen el dado y la caja? ¿En qué se diferencian?*

El dado tiene 6 caras. Cada cara tiene la forma de un cuadrado.

El paquete de tizas también tiene 6 caras. Pero las caras tienen forma rectangular.

El dado y la caja se parecen en la forma (si la caja fuera de goma y pudiésemos comprimirla tanto como quisiéramos, podríamos obtener un dado a partir de ella). Se parecen en que tienen ambos 6 caras. Se diferencian en que en un caso las caras son cuadradas y en el otro rectangulares.

Actividades propuestas

- Busca una lata de tomate frito y el trozo de cartón que hay en el interior de un Orollo de papel higiénico.
 - ¿Qué forma tienen las bases de la lata?
 - ¿Hay esquinas angulosas en alguno de los objetos?
 - Mete unas tijeras en el cartón del rollo de papel higiénico y corta. ¿Qué figura plana obtienes?
 - Imagina que quieres poner tapa y base al rollo de cartón para que tenga la misma forma que la lata de tomate frito. ¿Qué figura plana debes utilizar?



1.2. Dimensiones

El espacio involucra tres **dimensiones: ancho, alto y largo**, mientras que el plano involucra solo a dos.

Ejemplo:

- ✚ Una hoja de tamaño A4 mide 21 cm x 29,7 cm. Damos 2 números para hablar de su tamaño.

La caja donde vienen los paquetes de 2500 hojas A4 mide 21 cm x 29,7 cm x ??? cm. Necesitamos tres números para referirnos a su tamaño. El número que hemos añadido es la altura de la caja.

Ejemplo:

- ✚ Si has visto dibujos hechos por los egipcios te habrá llamado la atención que están dibujados con unas poses muy extrañas. Se debe a que representar en un plano un cuerpo del espacio es muy complejo. Las figuras pierden su volumen.



Leonardo Da Vinci, un genio en todos los campos y que colaboró en muchas actividades matemáticas con Luca Paccioli (que era su profesor) fue uno de los pioneros en conseguir representar lo tridimensional en un cuadro. Esas representaciones utilizan matemáticas.

Actividades propuestas

- Busca una caja de galletas. Mídela y da el valor de sus tres dimensiones.
- Dibuja en un papel esa caja de galletas. Es difícil, porque estás representando en algo de dimensión 2 (la hoja) un objeto tridimensional (la caja).
- Dibuja un balón de fútbol, una lata de conservas y un donut en una hoja de papel.

1.3. Poliedros, cuerpos redondos y otras figuras

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos.

Llamamos **cuerpos redondos** a figuras bastante regulares que tienen alguna superficie curva.

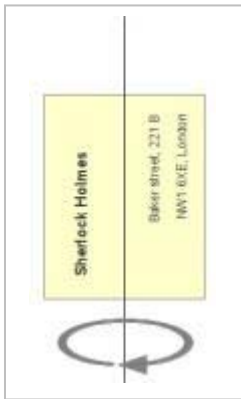


Un tipo particular de poliedros son los poliedros regulares, que estudiaremos en otra sección de este capítulo. Los prismas y pirámides también son poliedros.

Los principales cuerpos redondos que estudiaremos son las esferas, conos y cilindros. Un tipo particular de cuerpos redondos es el de los cuerpos de revolución, que se obtienen al girar una figura plana en torno a un eje.



Actividades resueltas



✚ Si cogemos una tarjeta de visita (rectangular), la atravesamos por un hilo siguiendo su eje de simetría y la hacemos girar, ¿qué figura obtenemos?

La figura que se obtiene es un cilindro. Puedes comprobarlo.

✚ ¿Qué forma tiene una rosquilla?

La rosquilla no es ni una esfera ni un cilindro ni un cono. Su forma, igual que la de un neumático es otra figura matemática, muy utilizada, denominada toro (no te asustes, es un toro inofensivo, sin cuernos).



Actividades propuestas

- Corta un triángulo isósceles de papel. Pega un hilo a lo largo de su eje de simetría y hazlo girar. ¿Qué figura se obtiene?
- Para cada uno de los apartados siguientes, escribe en tu cuaderno 5 objetos cotidianos que tengan la forma requerida:
 - esfera
 - cilindro
 - poliedro regular
 - prisma
 - pirámide
 - cono
- Aprende a hacer un cubo con papiroflexia:

http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13498&directory=67

1.4. Elementos del espacio

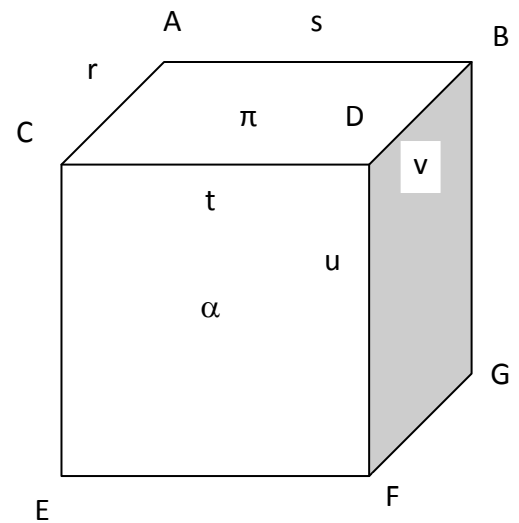
Puntos, rectas y planos

Mira a tu alrededor. Estás en una habitación. Las paredes, el suelo y el techo son planos. Estos planos a veces se cortan en segmentos de rectas. Y la intersección de tres de esos planos o de dos de esas rectas es en un punto.

Actividades resueltas

- ✚ En el cubo del margen hemos dado nombre a los puntos con letras mayúsculas: $A, B, C, D, E, F, G, \dots$; a las rectas con letras minúsculas: r, s, t, u, \dots ; y a los planos con letras griegas: π, α, \dots

También se podrían denominar diciendo, recta que pasa por los puntos A y B , o plano que contiene a los puntos A, B y C .



Actividades propuestas

8. Indica la recta que pasa por los puntos D y F .
9. Indica el plano que pasa por los puntos C, D y E .
10. Indica el plano que contiene a la recta t y al punto B .
11. Indica el plano que contiene a las rectas s y t .

Posiciones relativas de dos planos

En tu habitación el plano del techo y el del suelo son planos paralelos. El plano del techo y el de una pared son planos secantes. Además como forman un ángulo recto son planos perpendiculares.

Dos planos en el espacio son **paralelos** si no tienen ningún punto en común, y son **secantes** si tienen una recta en común.

Actividades resueltas

- ✚ Observamos las seis caras del cubo y comprobamos que o son paralelas o son secantes. Las que son secantes también son en este caso perpendiculares.
- ✚ El plano π y el plano α son secantes y se cortan en la recta t .
- ✚ El plano π y el del suelo son paralelos.

Actividades propuestas

12. Indica un plano paralelo al plano de la pizarra.
13. Dibuja en tu cuaderno un croquis de tu aula y señala los planos que sean secantes al plano del techo.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Sigue mirando tu aula. Fíjate en una recta del techo. Las otras tres rectas del techo o se cortan con ella, o son paralelas. Sigue fijándote en la misma recta, y mira las cuatro rectas verticales que forman las paredes. ¿Cómo son respecto a esa recta? Observa que dos de ellas la cortan pero las otras dos ni la cortan ni son paralelas. Decimos que esas rectas se cruzan

Dos rectas en el espacio o son **paralelas** o se **cortan** o se **cruzan**.

Actividades resueltas

- ✚ Nos fijamos en el cubo anterior en la recta r . La recta s la corta (es secante) en el punto A .
- ✚ La recta t la corta en el punto C . Las tres rectas r , s y t están en el plano π .
- ✚ Las rectas r y v son paralelas y también están en el plano π .
- ✚ Pero las rectas r y u no se cortan en ningún punto, ni son paralelas, ni hay ningún plano que contenga a ambas. Las rectas r y u se cruzan.

Actividades propuestas

14. Dibuja en tu cuaderno un cubo. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:
- Tres pares de rectas que sean paralelas. Indica en cada caso sobre qué plano se encuentran
 - Tres pares de rectas que se crucen.
 - Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.

Posiciones relativas de recta y plano

Una recta puede estar **contenida** en un plano o ser **paralela** al plano o ser **secante**.

Actividades resueltas

- ✚ Seguimos fijándonos en el cubo anterior. El plano π contiene a las rectas r , s , t y v . La recta u corta al plano π en el punto D . La recta que pasa por los puntos E y F es paralela al plano π .

Actividades propuestas

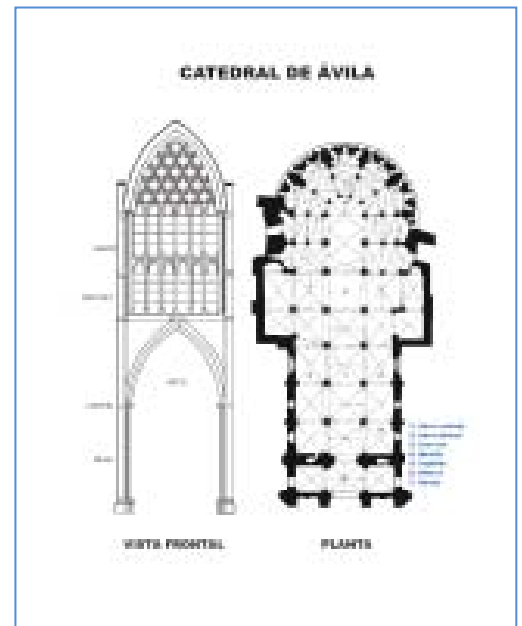
15. Indica las rectas que están contenidas en el plano α . Indica las que son paralelas a dicho plano. Indica las que son secantes señalando el punto de intersección.

1.5. Representación de cuerpos geométricos

Del espacio al plano

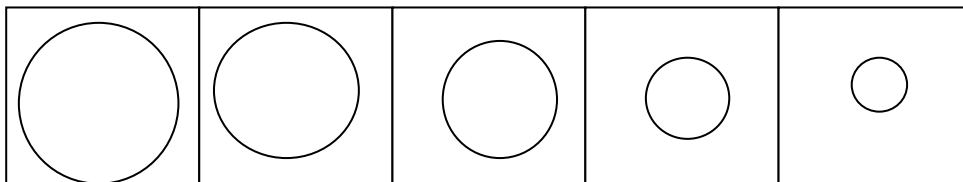
Los arquitectos, ingenieros y en otras muchas profesiones, necesitan dibujar en papel los edificios y las piezas que diseñan. Una forma de hacerlo es representarlos desde tres puntos de vista: **planta, perfil y alzado**.

Otros profesionales, como los médicos, utilizan otras técnicas, como la **tomografía**, en la que se representan los cortes mediante varios planos paralelos.



Actividades resueltas

✚ La siguiente tomografía corresponde a un cono con cortes paralelos a su base:



Actividades propuestas

16. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de:

- a) un cubo b) un cilindro c) un cono d) una esfera e) una pirámide

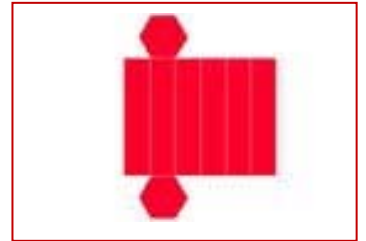
17. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:

- a) Una esfera con cortes paralelos a su ecuador
 b) Un cilindro con cortes paralelos a su base
 c) Un cilindro con cortes paralelos a una arista
 d) Un cubo con cortes paralelos a una cara
 e) Un cubo con cortes paralelos a una arista.

Del plano al espacio

Muchos cuerpos geométricos podemos construirlos haciendo su desarrollo en un plano. Por ejemplo podemos construir un prisma hexagonal con el desarrollo del margen:

Si quieres construirlo, piensa ¿Dónde pondrías las pestañas para poder pegarlo?



Actividades propuestas

18. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir un cubo. Dibuja las pestañas para pegarlo.
19. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir una caja con tapa.
20. Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro.

Formas de representación

Hemos visto formas de representar los cuerpos geométricos: tomografías, desarrollo, perfil, planta y alzado... pero existen otras como describirlo con palabras, como por ejemplo: Posee 8 vértices, 12 aristas, 6 caras todas iguales a cuadrados. ¿Sabes ya qué estamos describiendo?

Antes vimos la diferencia entre la forma de dibujar en el Egipto antiguo y la de Leonardo da Vinci. Leonardo ya conocía la perspectiva. Los artistas de Renacimiento consiguieron un gran dominio de la perspectiva.

Una forma de perspectiva es la perspectiva caballera, que consiste en suponer que el ojo que mira la figura está infinitamente lejos. Se tiene entonces, entre otras, las siguientes reglas:

- a) Las rectas paralelas en la realidad se mantienen paralelas en el dibujo.
- b) Los segmentos iguales sobre rectas paralelas mantienen igual longitud.



Cubo en perspectiva caballera

Actividades propuestas

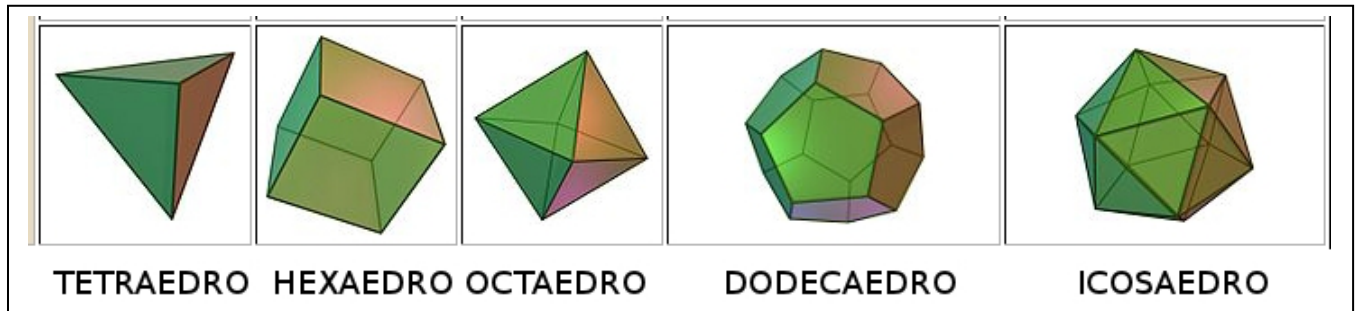
21. Dibuja en tu cuaderno una mesa en perspectiva caballera.
22. Describe un tetraedro diciendo cuántos vértices tiene, cuántas aristas y cuántas caras.
23. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de un cubo.
24. Dibuja en tu cuaderno una habitación en perspectiva caballera.
25. Dibuja una tomografía de una botella cortando por planos paralelos a su base.

2. POLIEDROS

2.1. Poliedros regulares

Un **poliedro** es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Solo existen 5 poliedros regulares convexos, que son los que presentamos en la siguiente tabla:



Llamamos **aristas** de un poliedro a los lados de las caras de éste.
Los **vértices** del poliedro son los vértices de sus caras.

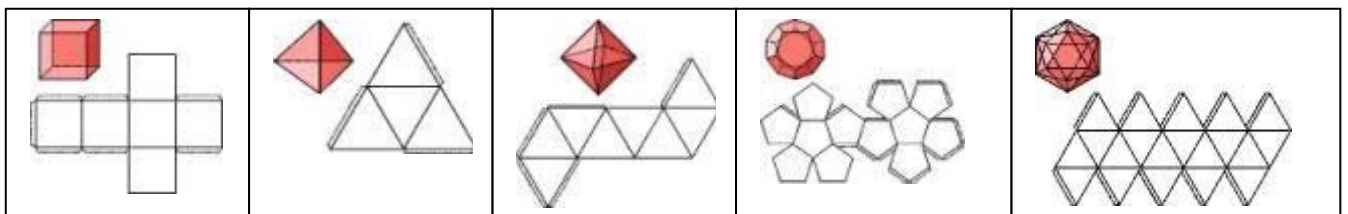
Actividades resueltas

✚ Cuenta el número de caras, de aristas y de vértices de cada uno de los 5 poliedros regulares.

	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4	6
CUBO (HEXAEDRO)	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	20	12	30

Actividades propuestas

26. Haz modelos en cartulina de los cinco poliedros regulares. Puedes hacerlo en equipo con tus compañeros.

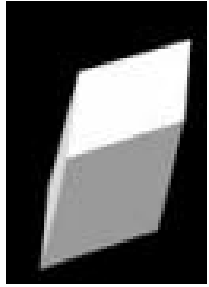


Para cada uno de los cinco poliedros regulares calcula el valor de:

$$\text{Número de caras} + \text{número de vértices} - \text{número de aristas.}$$

¿Observas alguna pauta?

27. Hay poliedros con todas sus caras polígonos regulares que no son poliedros regulares. Describe el poliedro del margen. ¿Por qué no es un poliedro regular?



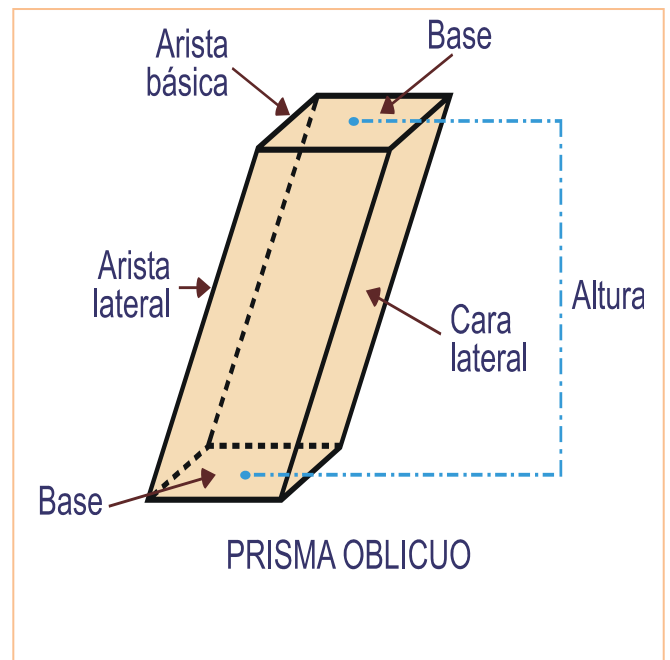
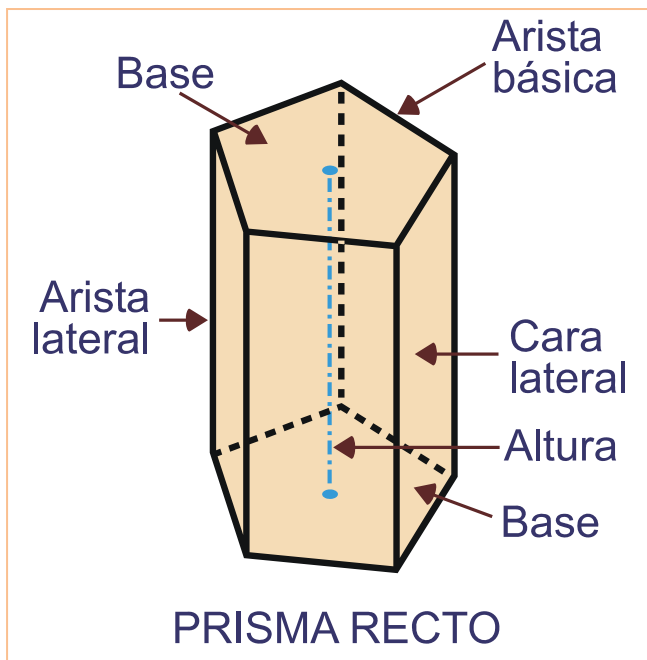
28. Hay poliedros con todas sus caras iguales que no son poliedros regulares. Como el poliedro formado por 6 rombos que se llama *romboedro*. Descríbelo. Construye uno con el desarrollo indicado:



29. En una trama de triángulos dibuja el desarrollo de un poliedro que tenga 6 caras triángulos equiláteros y construye dicho poliedro. Tiene todas sus caras iguales y polígonos regulares. ¿Por qué no es un polígono regular?

2.2. Prismas.

Un **prisma** es un poliedro limitado superior e inferiormente por dos polígonos paralelos e iguales (**bases**) y tantos paralelogramos (**caras laterales**) como lados tienen las bases.



La **altura** del prisma es la distancia entre sus bases.

Cuando todas las caras laterales son rectángulos, se dice que el prisma es un **prisma recto**.

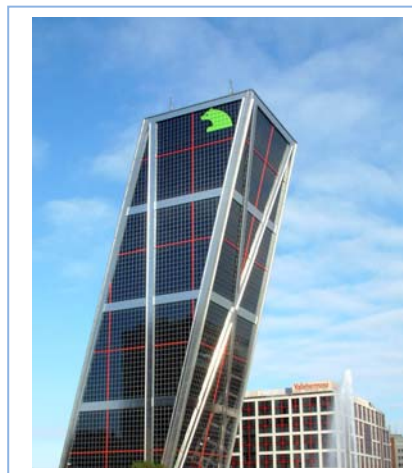
Si algunas caras laterales son romboides, tenemos un **prisma oblicuo**.

Ejemplo:

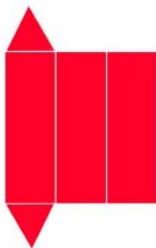
✚ Casi todos los rascacielos tienen una forma que recuerda a un prisma recto.



Aunque algunos arquitectos tienen ideas más originales y se atreven con prismas oblicuos.



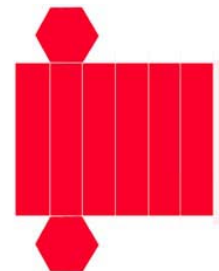
Llamamos **prisma regular** al prisma que tiene por bases dos polígonos regulares.



PRISMA TRIANGULAR

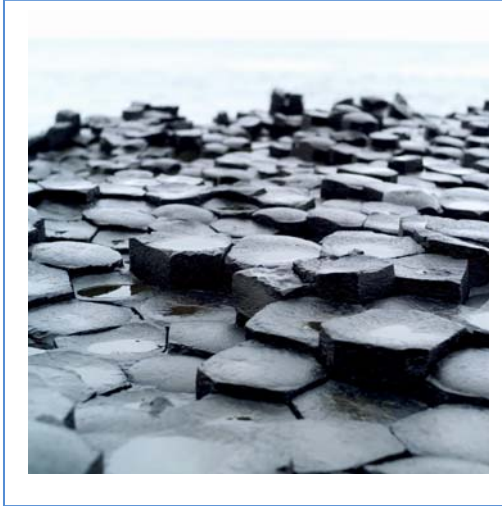


PRISMA RÓMBICO



PRISMA HEXAGONAL

Aun cuando no sea regular, al prisma se le nombra en función de los polígonos de la base. Así, si la base es un triángulo tendremos un **prisma triangular**, si es un cuadrilátero el prisma se llamará **cuadrangular**, si es un rombo, **prisma rómbico** y cuando la base sea un hexágono, el prisma será **hexagonal**.

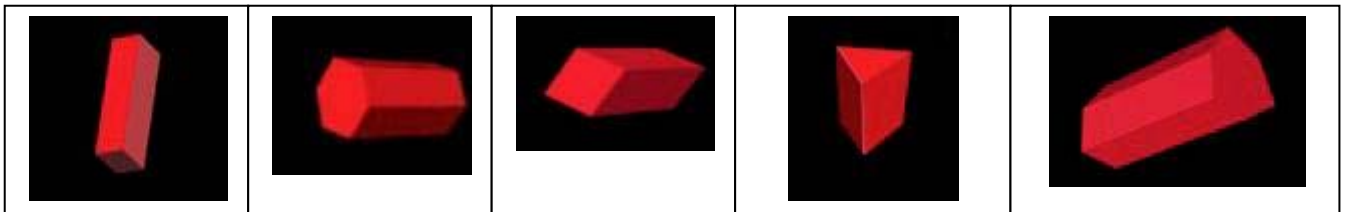


La Calzada de los Gigantes, en Irlanda del Norte, presenta rocas de Basalto que han cristalizado en forma de prismas hexagonales. Las figuras geométricas aparecen también en la naturaleza.

Los prismas cuadrangulares pueden tener otros muchos nombres como paralelepípedo, si todas sus caras son paralelogramos, paralelas dos a dos; ortoedro si sus caras son rectángulos, es decir, es un paralelepípedo rectangular. Además de los que ya conoces como cubo, prisma rómbico...

Actividades propuestas

30. Hay unas chocolatinas que tienen forma de prisma triangular regular recto. ¿Qué otros prismas regulares puedes construir con unas cuantas de ellas? Construye también prismas que no sean regulares.
31. Clasifica los prismas de la figura en función de que sean regulares o no, rectos o oblicuos y del número de lados de sus bases.



32. A partir del desarrollo de un prisma cuadrangular regular recto, piensa cómo debe ser el desarrollo de un prisma cuadrangular regular oblicuo. ¡Constrúyelo!
33. Recuerda: Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un poliedro. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma regular triangular? ¿Y un prisma regular cuadrangular?
34. Describe un ortoedro, diciendo el número de aristas y vértices, y el número de caras, describiendo su forma. (A veces se le llama *caja de zapatos*).

2.3. Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado inferiormente por un polígono y superior y lateralmente por triángulos con un vértice común.



Llamaremos **base** de la pirámide al polígono que la limita inferiormente.

Caras laterales a los triángulos que tienen un lado común con la base y un vértice común.

A ese vértice común se le llama **vértice** de la pirámide.

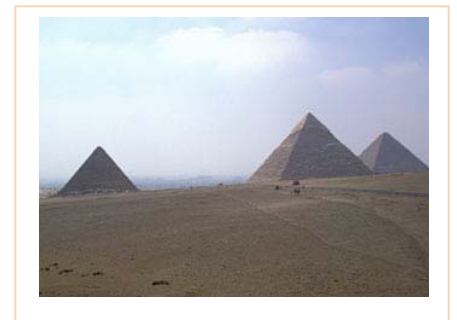
La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice a la base.

Cuando la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de la base, nos encontramos ante una **pirámide regular**.

Dependiendo del número de lados de la base de la pirámide, ésta puede ser **triangular, cuadrangular, pentagonal...**

Ejemplo:

- ✚ Hay unas pirámides muy famosas: las pirámides de Giza, cerca de El Cairo, en Egipto. Son pirámides regulares con base cuadrada.



Ejemplo:

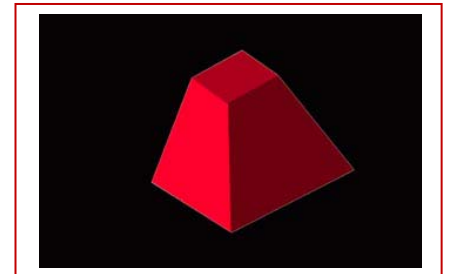
- ✚ Un tetraedro regular puede pensarse como una pirámide triangular regular.

Ejemplo:

- ✚ Un octaedro regular se puede cortar con un corte plano, formando dos pirámides cuadrangulares regulares. Por ese motivo se le denomina "bipirámide".

Llamamos **tronco de pirámide** al poliedro que se obtiene al cortar una pirámide por un plano paralelo a su base.

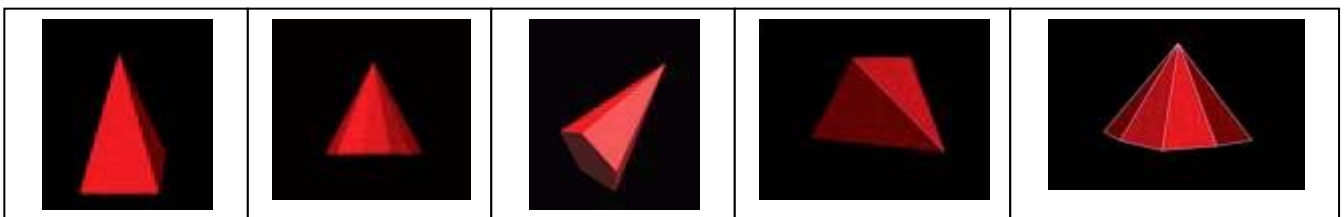
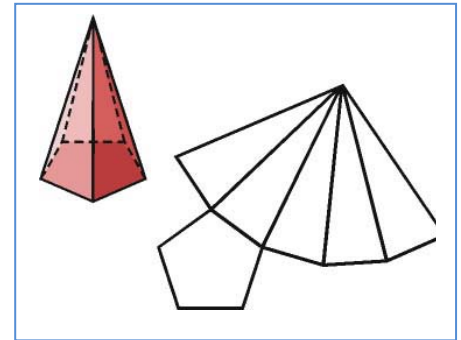
Observación: Al cortar la pirámide por el plano paralelo a su base en realidad quedan dos cuerpos: una pirámide más pequeña, proporcional a la que teníamos originalmente y el tronco de pirámide.



El tronco de pirámide conserva la base de la pirámide original y, en el plano del corte, aparece un nuevo polígono, que es semejante a la base (y que actúa a modo de "tapa" del poliedro). Esta es la llamada **base superior**.

Actividades propuestas

35. Construye una pirámide pentagonal regular usando un desarrollo como el indicado.
36. Sabiendo cómo es el desarrollo de una pirámide pentagonal regular, y que un tronco de pirámide se obtiene cortando ésta por un plano, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo del tronco de pirámide pentagonal regular.
37. Clasifica las pirámides de la figura en función de que sean regulares o no, rectas u oblicuas y del número de lados de su base.



38. A partir del desarrollo de una pirámide cuadrangular regular recta, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo de una pirámide cuadrangular oblicua. ¡Constrúyela!

2.4. Superficie de poliedros

La **superficie de un poliedro** es la suma de las áreas de todas sus caras.

Calcular la superficie de un poliedro es simple, puesto que solo hay que **reducirlo a calcular las áreas de los polígonos que forman sus caras** y sumar.

Ejemplos:

- Superficie de un cubo de 3 cm de arista:

El cubo tiene 6 caras, que son cuadrados. Como el área de cada uno de esos cuadrados es 9 cm^2 , el del cubo será $6 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$.

- Superficie de un icosaedro regular de 3 cm de arista:



El icosaedro regular consta de 20 triángulos iguales. Como el área del triángulo es la mitad del producto de la base (3) por la altura $(\frac{3\sqrt{3}}{2})$, el área de cada uno de los triángulos es $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (\frac{3\sqrt{3}}{2})$. Así, el área del icosaedro es $45\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

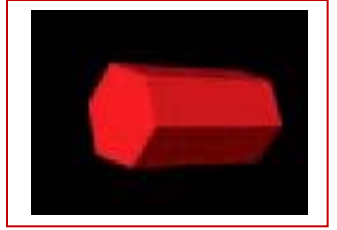
- ✚ Superficie de un prisma hexagonal regular recto de altura 10 cm y en el que el lado del hexágono de la base es de 4 cm.

Debemos recordar que el área de un polígono regular es la mitad del producto de su perímetro por su apotema. Así, como el lado mide 4 cm, el perímetro mide 24 cm. Calculamos la longitud de apotema, utilizando el teorema de Pitágoras podemos deducir que la apotema del hexágono mide $2\sqrt{3}$.

Así el área de una base es $24 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Las caras laterales son rectángulos. El área de cada una de las caras laterales se calcula multiplicando la base por la altura: $4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}^2$.

La superficie total del prisma se obtiene sumando el área de las 6 caras laterales rectangulares más el de las dos bases hexagonales: $6 \cdot 40 + 2 \cdot 24\sqrt{3} = 240 + 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

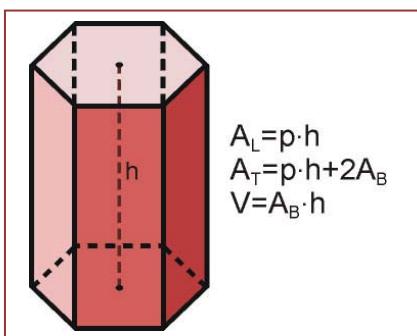


Actividades propuestas

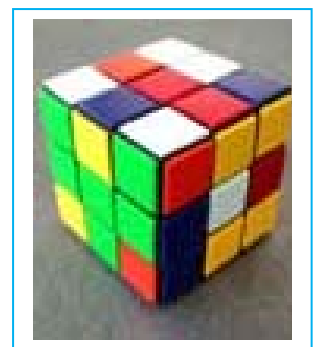
39. Halla la superficie de un octaedro regular de 5 cm de arista.
40. Halla el área de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura mide 12 cm.
41. ¿Cuánto cartón es necesario para construir una caja de zapatos de aristas con longitudes de 12 cm, 22 cm y 10 cm?
42. Si con un litro de pintura podemos pintar 20 m^2 , ¿cuántos litros de pintura son necesarios para pintar un icosaedro regular de 38 cm de arista?

2.5. Volumen de prismas y pirámides

El **volumen** de un cuerpo geométrico representa lo que ocupa en el espacio. Asociado a este concepto está el de **capacidad** de un cuerpo, que es lo que puede contener. En matemáticas muchas veces se confunden estos dos conceptos, dado que las “paredes” del cuerpo se suponen sin grosor.



Del mismo modo que el área de un rectángulo es el producto de sus dos dimensiones (base x altura), el volumen del prisma rectangular recto (**ortopedro**) es el producto de sus tres dimensiones: largo x ancho x alto.



Si pensamos un poco en qué significa largo x ancho, veremos que esto es precisamente el

área de la base, con lo que el volumen del ortopedro también puede calcularse multiplicando el área de su base por su altura. Podemos extender esa idea a cualquier prisma:

El volumen de un prisma es igual al producto del área de su base por su altura.

Actividades resueltas

- ✚ Calcula el volumen de un prisma recto cuya base es un pentágono regular de 10 cm^2 de área y su altura es de 15 cm.

Como nos dan el área de la base no necesitamos calcularla.

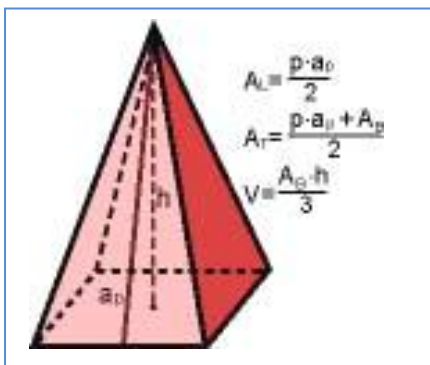
$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{altura} = 10 \cdot 15 = 150 \text{ cm}^3$$

- ✚ Halla el volumen de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura es igual a la diagonal mayor.

El área del rombo es la mitad del producto de sus dos diagonales. Así en este caso el área de la base del prisma es $1/2 \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ cm}^2$.

Para calcular el volumen nos da igual que el prisma sea recto o no, ya que solo nos interesa el área de la base y la altura, que en este caso es de 8 cm, igual a la diagonal mayor.

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{altura} = 24 \cdot 8 = 192 \text{ cm}^3$$



El **volumen de una pirámide** es un tercio del volumen del prisma que tiene la misma base que la pirámide y la misma altura que ella.

Probar esa propiedad relativa al volumen de una pirámide es complicado: requiere intuición geométrica, aunque te puedes hacer una idea de por qué ese resultado es cierto utilizando papiroflexia para construir un prisma a partir de tres pirámides del mismo volumen (consulta la revista al final del tema).

Actividades propuestas

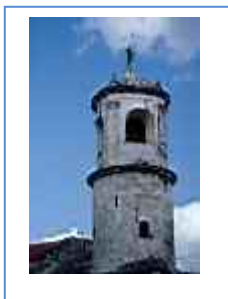
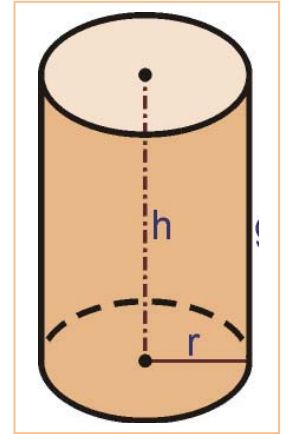
- Halla el volumen de una pirámide hexagonal regular, en la que cada lado de la base mide 3 cm y la altura es de 12 cm.
- Halla el volumen de un octaedro de 8 cm de arista. *Indicación:* puedes descomponer el octaedro en dos pirámides cuadradas regulares.

3. CUERPOS REDONDOS

3.1. Cilindros

Del mismo modo que un prisma recto se levanta a partir de una base poligonal, un **cilindro** se construye a partir de una base circular.

Un **cilindro** se puede generar haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Los círculos que se obtienen al girar el otro lado son las **bases** del cilindro. El lado del rectángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la **altura** del cilindro.



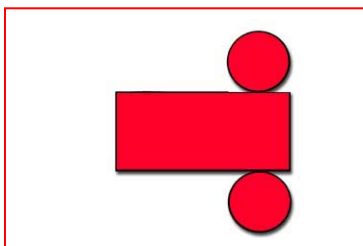
Ejemplo:

Antes nos hemos referido a rascacielos con forma de prisma, pero también los hay con forma de cilindro. Incluso hay cilindros en torres de iglesias.

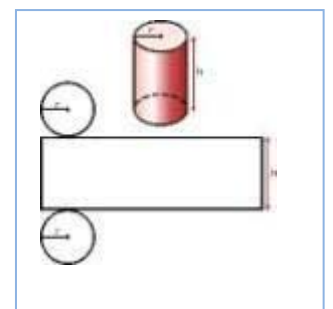


Ejemplo:

Las latas de conservas son cilindros. Los rollos de papel higiénico tienen forma cilíndrica (de hecho, el nombre cilindro proviene de una palabra griega que se refiere a su forma enrollada). Hay envases de patatas fritas con forma cilíndrica. Las latas de refresco también tienen forma de cilindro. Muchos objetos cotidianos tienen forma de cilindro.



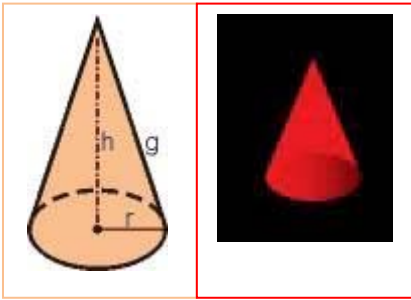
El **desarrollo** de un cilindro nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo. Consta de un rectángulo, que lo limitará lateralmente y de dos círculos, las bases que lo limitan inferior y superiormente.



Actividades propuestas

45. Dibuja el desarrollo correspondiente a un cilindro cuya base es un círculo de 2 cm de radio y su altura es de 10 cm. Después, utilizando cinta adhesiva, construye ese cilindro en papel.

3.2. Conos



Si para hablar del cilindro poníamos como ejemplo a los prismas, para hablar del cono ponemos como ejemplo a las pirámides.

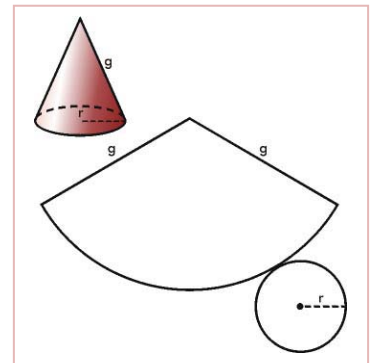
Un **cono** se puede generar haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El círculo que se obtiene al girar el otro cateto es la **base** del cono. El lado del triángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la **altura** del cono. La hipotenusa del triángulo rectángulo mide lo mismo que la **generatriz** del cono.

Ejemplo:



No conocemos rascacielos con forma cónica, pero las tiendas de los indios que estamos acostumbrados a ver en las películas del oeste tienen esa forma.

El **desarrollo** de un cono consta de un sector circular y un círculo. Nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo.



Al igual que hacíamos con las pirámides, podemos cortar un cono por un plano paralelo a su base, resultando un cono más pequeño (la parte superior del corte) y otro cuerpo.

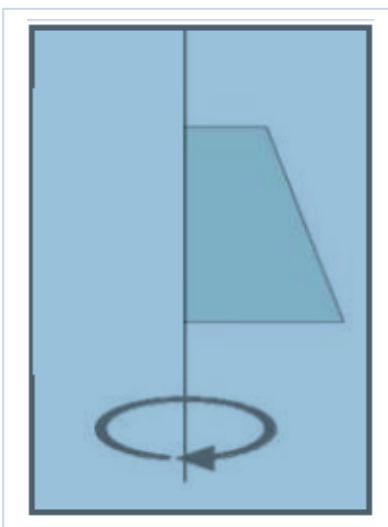
Ese otro cuerpo, que tiene **dos bases** circulares se denomina **tronco de cono**. Su **altura** es la distancia entre sus dos bases y llamaremos **generatriz** del tronco de cono al segmento que hay de la generatriz del cono original que ha quedado tras cortar la parte superior.



Un tronco de cono se puede obtener haciendo girar un trapecio rectángulo alrededor de su altura.

Ejemplo:

✚ En los circos, los domadores suelen subir a las fieras en "taburetes" con forma de tronco de cono. Una flanera tiene forma de tronco de cono. Los envases de queso fresco también tienen forma de cono. ¿Has pensado por qué?



3.3. Esferas



Madrid: Al otro lado del muro

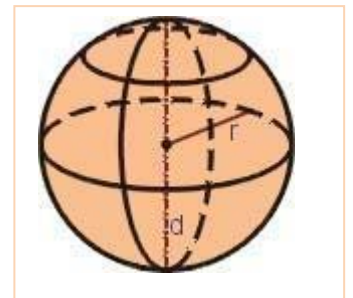
Es más complicado definir una esfera que poner ejemplos de objetos con forma esférica: una sandía, una pelota, una canica... La esfera es la generalización natural del círculo (plano) al espacio.



Una **esfera** se puede generar haciendo que un semicírculo gire alrededor de su diámetro.

El radio del semicírculo es el **radio** de la esfera.

Cuando cortamos una esfera por un plano, todos los cortes son círculos. Si el plano por el que cortamos pasa por el centro de la esfera, obtenemos un **círculo máximo**. Su radio es igual al de la esfera.



Ejemplo:



✚ En la esfera terrestre, los meridianos se corresponden con círculos máximos. Los paralelos son las circunferencias que limitan los círculos que quedan al cortar la esfera terrestre con planos perpendiculares al eje que pasa por los polos. El ecuador es el único paralelo que es un círculo máximo.

Actividades resueltas

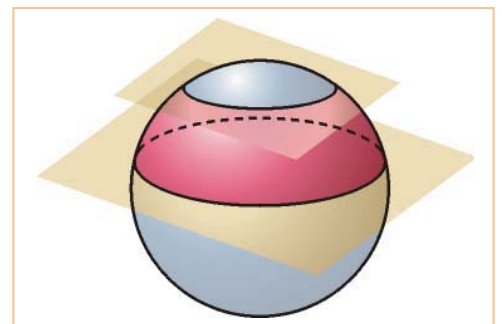
- ✚ Una esfera de 10 cm de radio se corta por un plano de modo que el círculo resultante tiene 6 cm de radio. ¿Cuál es la distancia del centro de la esfera a ese plano?

Debemos tener en cuenta que el radio de la esfera (R) es la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por uno de sus catetos al radio del círculo resultante del corte con el plano (r) y por el otro cateto a un trozo del radio de la esfera perpendicular al plano, cuya longitud es la distancia pedida (d).

Así, como conocemos dos de los datos, solo tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el tercero (la distancia pedida d).

Así $r^2 + d^2 = R^2$ y, despejando obtenemos

$$d^2 = R^2 - r^2 = 100 - 36 = 64. \text{ Por lo que } d = \sqrt{64} = 8 \text{ cm.}$$



3.4. Superficie de cilindros, conos y esferas

Superficie del cilindro

El procedimiento para hallar la superficie de un cilindro o un cono nos recuerda el modo con el que calculábamos la superficie de un prisma o de una pirámide: no tenemos más que ver qué figuras intervienen en su desarrollo, calcular el área de cada una de ellas y sumarlas.

En algunos textos se utiliza el concepto de **área lateral** tanto para prismas como para cilindros. Con él se refieren al área “de las paredes” de la figura, sin tener en cuenta el de la o las bases. **Este concepto no es necesario si en cada momento sabes qué estás haciendo.** Las fórmulas se deben comprender, pero las matemáticas no son una ristra de fórmulas que se deben aprender de memoria. Entender lo que se debe hacer en cada momento te facilitará el aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo del cilindro consta de 2 círculos y un rectángulo. La altura del rectángulo (h) es la altura del cilindro y como el rectángulo se tiene que enrollar alrededor de la base del cilindro, su base tiene que medir lo mismo que la correspondiente circunferencia y ese valor es, siendo r el radio de la base del cilindro. Así, el área del rectángulo es $2\pi rh$.

Por otra parte cada una de las bases tiene área πr^2 , y tiene dos bases. Así:

$$\text{Superficie del cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \pi \cdot r^2$$

Actividades propuestas

46. Halla la superficie de un cilindro cuya altura es de 12 cm y el radio de su base es de 3 cm.
47. Busca una lata de atún en conserva (cilíndrica). Mide su altura y el diámetro de sus bases. Dibuja el desarrollo del cilindro que da lugar a esa lata. Recórtalo y forma una réplica en papel de la lata de atún.

Superficie del cono

Siguiendo la misma idea anterior, para calcular la superficie de un cono, sumaremos las áreas de las dos piezas que componen su desarrollo: un círculo y un sector circular. (Mira la figura del desarrollo del cono que está en la sección 3.2).

Si la base del cono es un círculo de radio r , la longitud de la correspondiente circunferencia es $2\pi r$ y la parte curva del sector circular en el desarrollo del cono debe enrollarse sobre esa circunferencia, luego la medida de esa línea curva es $2\pi r$.

Para calcular el área del sector circular haremos una regla de tres, teniendo en cuenta que el radio de ese sector circular es la generatriz del cono: si a una longitud de $2\pi g$ (circunferencia completa) le corresponde un área de πg^2 , a una longitud de $2\pi r$ le corresponderá $2\pi r \cdot \pi g^2 / 2\pi g = \pi \cdot r \cdot g$.

La base del cono es un círculo de radio r , cuyo área es de sobra conocido. Así tenemos que

$$\text{Superficie del cono} = \text{Área del sector circular} + \text{Área del círculo} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

Para calcular la superficie del tronco de cono debemos calcular las áreas de sus bases, que son círculos (y, por tanto, fáciles de calcular) y la de su pared lateral. El área de esta pared lateral se puede calcular

restando el área de la pared del cono original menos el de la pared del cono pequeño que hemos cortado.

Superficie lateral del tronco de cono = Superficie lateral del cono original – Superficie lateral del cono que cortamos

Para calcular la superficie total hay que sumar al área lateral el de las dos bases.

También se puede calcular esto mediante una fórmula, cuya prueba utiliza dos teoremas importantes de la geometría plana: el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales.

Supondremos que el radio de la base mayor del tronco de cono es r , el de la base menor r' y la generatriz g . Entonces

$$\text{Superficie del tronco de cono} = \pi \cdot (r+r') \cdot g + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r'^2$$

Actividades resueltas

- ✚ Queremos construir un taburete para elefantes con forma de tronco de cono, con 75 cm de altura y bases de 1,50 y 2,50 metros. Posteriormente forraremos con tela todo el taburete. Si el metro cuadrado de la tela elegida cuesta 3 euros (y se supone no se desperdicia nada en la elaboración) ¿cuánto cuesta forrar el taburete?

Lo primero que debemos hacer es expresar todos los datos con las mismas unidades. Lo expresaremos en metros.

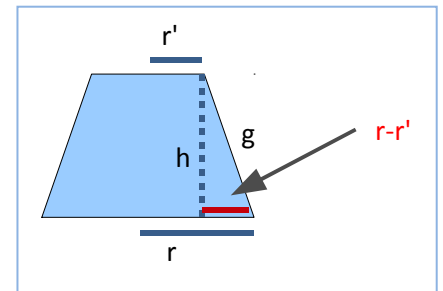
Como nos dan la altura y los radios, calcularemos la generatriz usando el teorema de Pitágoras:

Así $h^2 + (r-r')^2 = g^2$ y, retomando los datos tenemos:

$$r' = 1,5 \text{ m}; r = 2,5 \text{ m}; g = \sqrt{0,75^2 + 1^2} = 1,25 \text{ m.}$$

Con ello calculamos el área: $\pi \cdot (2,5 + 1,5) \cdot 1,25 + \pi \cdot 2,5^2 + \pi \cdot 1,5^2 = 42,39 \text{ m}^2$

y, por tanto, forrar el taburete nos cuesta $42,39 \cdot 3 = 127,17$ euros.



Superficie de la esfera

No podemos calcular la superficie de la esfera mediante su desarrollo, ya que solo se podría obtener de forma aproximada. Sin embargo, hay diferentes métodos (más avanzados) que permiten calcularlo. Aunque no somos partidarios de dar fórmulas, esta vez tenemos que avanzar que

$$\text{Superficie de la esfera de radio } r \text{ es igual a } 4\pi r^2$$

Ese valor coincide con el del área lateral del cilindro de radio r y altura $2r$ (que es el que se ajusta por completo a la esfera). Como sabemos deducir el área lateral del cilindro, recordar esto nos evitará tener que recordar la fórmula anterior.

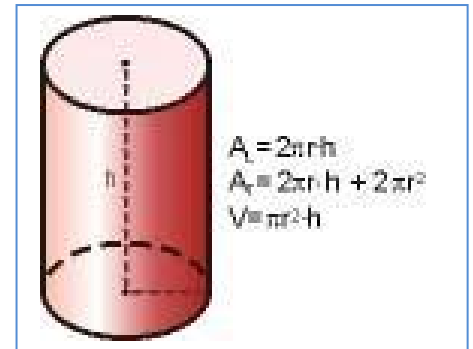
3.5. Volumen de cilindros, conos y esferas

Con el cálculo de volúmenes ocurre algo parecido a lo que ocurre con las áreas: el cálculo del volumen de un cilindro es similar al del volumen de un prisma, mientras que el cálculo del volumen del cono nos recuerda al del volumen de la pirámide. La esfera merece un capítulo aparte.

Volumen del cilindro

El volumen del cilindro se calcula como el producto del área de su base (que es un círculo) por su altura. Si el radio de la base es r y la altura es h nos queda

$$\text{Volumen cilindro} = \pi r^2 h$$



Ejemplo:

- Una lata de tomate frito en conserva tiene un diámetro de 6 cm y una altura de 12 cm . Vamos a calcular el volumen de la lata, que nos indicará cuánto tomate cabe en su interior.

Hay que tener cuidado con los datos porque nos dan el diámetro en lugar del radio. El radio de la base es 3 cm , la mitad del diámetro.

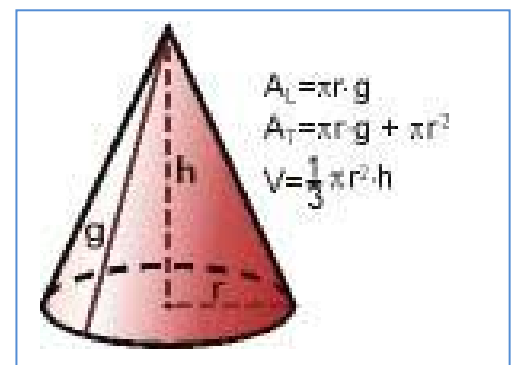
Así el volumen viene dado por

$$\text{Volumen} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 \approx 339,12\text{ cm}^3$$

Volumen del cono

El volumen de un cono equivale a un tercio del volumen del cilindro que tiene la misma base y la misma altura (¿te recuerda eso a algo?). Así, para un cono cuyo radio de la base es r y su altura es h se tiene que

$$\text{Volumen cono} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

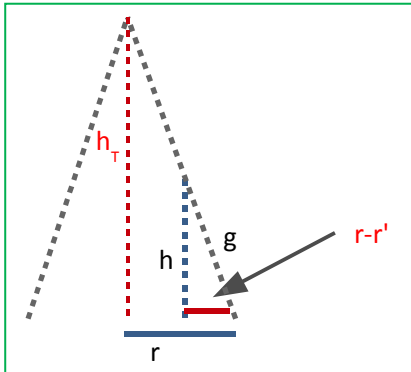


Para calcular el volumen de un **tronco de cono** calcularemos el volumen del cono original y le restaremos la parte superior que hemos cortado.

Ejemplo:

- ✚ Vamos a calcular el volumen del taburete para elefantes que hemos forrado de tela en una actividad anterior: tiene forma de tronco de cono, con 75 cm de altura y bases de 1,50 y 2,50 metros.

Lo primero que haremos es determinar el volumen del cono completo. Para ello necesitamos calcular su altura.



Utilizando semejanza de triángulos y llamando a la altura del cono total h_T tenemos que

$$h_T/h = r / (r - r')$$

de ahí que la altura del cono total sea $h_T = h \cdot r / (r - r') = 0,75 \cdot 2,5 / 1 = 1,875 \text{ m}$.

y por ello el volumen del cono total será de $V = h_T \pi r^2 = 36,8 \text{ m}^3$.

Ahora debemos calcular el volumen del “cono pequeño” (el que hemos eliminado para conseguir el tronco de cono). Su altura es la diferencia entre la altura del cono grande y la del tronco de cono. Su radio es el de la base superior del tronco de cono.

Por ello su volumen viene dado por $(h_T - h) \pi r'^2 = 7,95 \text{ m}^3$.

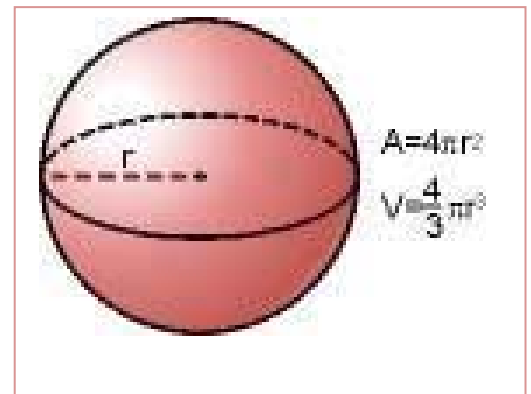
Consecuentemente, el volumen del tronco de cono es

$$36,8 - 7,95 = 28,85 \text{ m}^3.$$

Volumen de la esfera

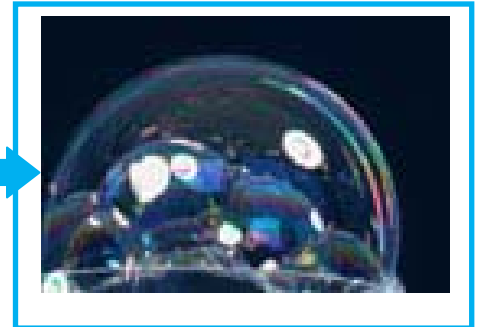
Al no tener un desarrollo plano, trabajar con la esfera es más difícil y requiere técnicas matemáticas que estudiarás en otros cursos. Simplemente por completar lo expuesto en este tema, damos la fórmula que permite calcular el volumen de la esfera en función de su radio r .

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

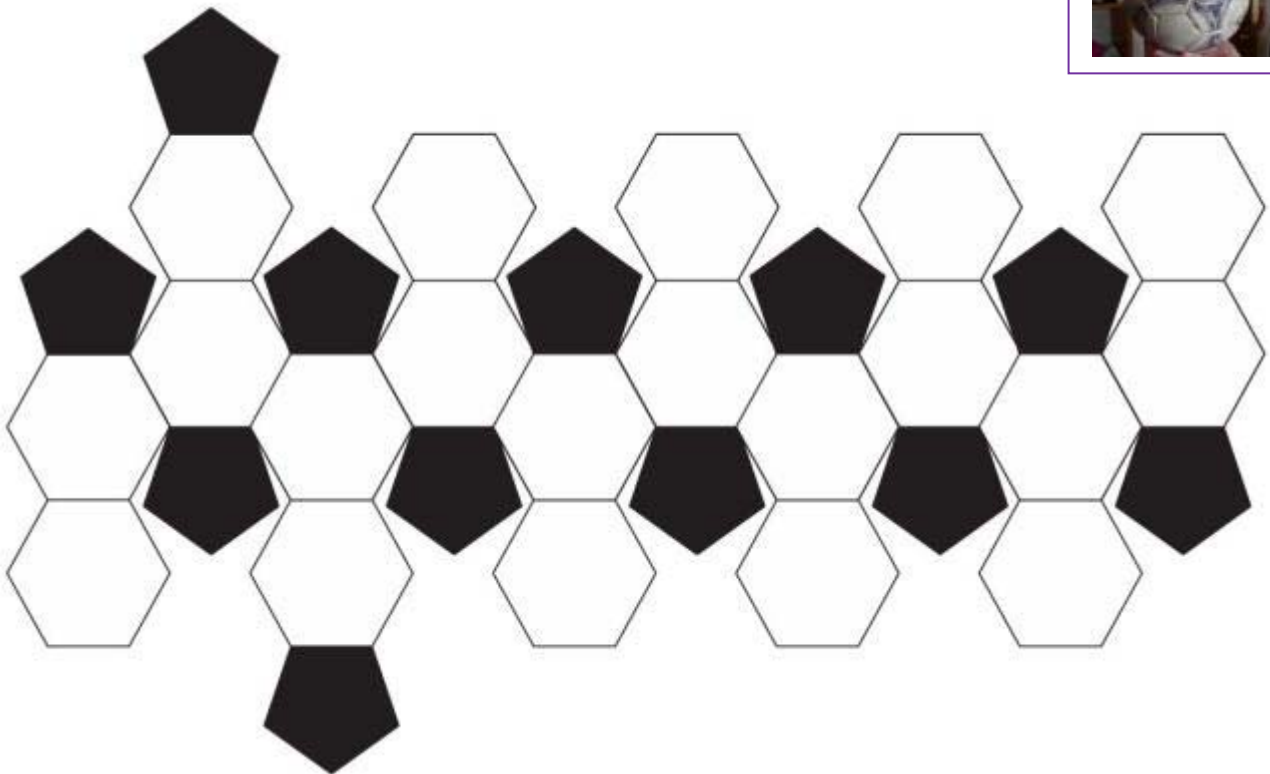


CURIOSIDADES. REVISTA**Esferas**

De todos los cuerpos geométricos que tienen la misma superficie total, el que encierra un mayor volumen es la esfera. Por eso las **pompas de jabón** son esféricas: contienen la mayor cantidad de aire que se puede encerrar con esa lámina de jabón. En dos dimensiones es el círculo el que encierra la mayor superficie; por eso si echas aceite encima del agua se forman círculos.

**Balones de fútbol**

Hay poliedros más complicados que los que hemos descrito en este capítulo. Por ejemplo, si a un icosaedro le cortamos las esquinas obtenemos un "**icosaedro truncado**". Esa es la forma real de los **balones de fútbol** (los clásicos que tienen pentágonos negros y hexágonos blancos). Lo que ocurre es que al inflar la cámara que hay en su interior se comban los polígonos, dando sensación de esfericidad. ¿Quieres comprobarlo? Simplemente recorta en cartulina este modelo y pega las uniones con cinta adhesiva.





Latas de conservas

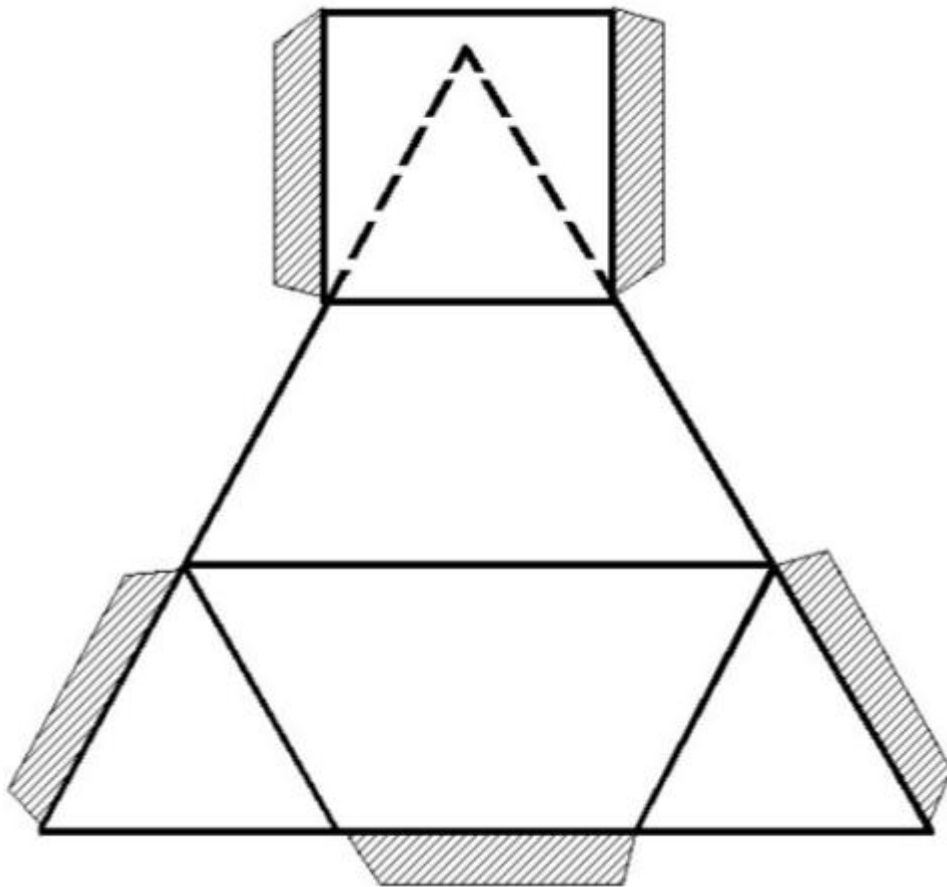
Muchas latas y botes de conservas tienen forma cilíndrica porque sería muy costoso fabricarlas de forma esférica. Aun así, debido a que sus bases son circulares, la relación área total / volumen es bastante satisfactoria.

Puzzles de dos piezas

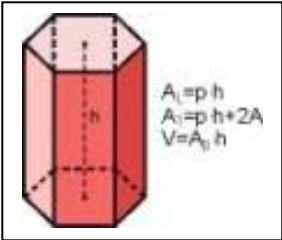
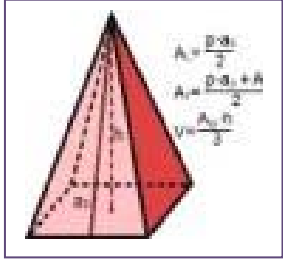
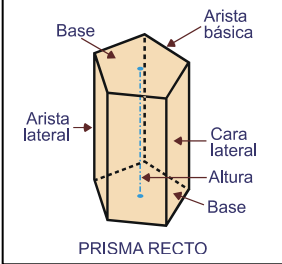
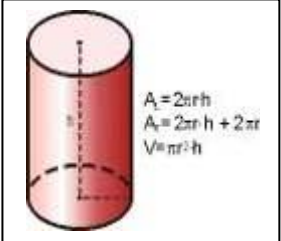
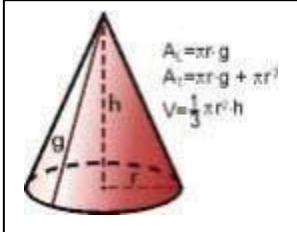
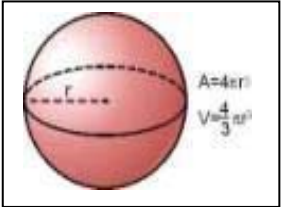
¿Te parece que un puzle de dos piezas es sencillo?

Te proponemos un reto: recorta en cartulina dos copias de esta figura, para armar con cada una de ellas un poliedro (cuyas caras son dos triángulos, dos trapecios y un cuadrado).

- Ahora, juntando esos dos poliedros forma un tetraedro.

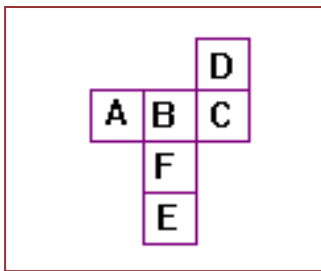


RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos	
Elementos del espacio	Puntos, rectas y planos		
Sistemas de representación	Planta, perfil y alzado. Tomografía. Perspectiva caballera.		
Posiciones relativas	Dos planos: o se cortan o son paralelos. Dos rectas en el espacio: o se cortan o son paralelas o se cruzan. Una recta y un plano: o la recta está contenida en el plano, o lo corta o es paralela.		
Poliedro	Cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos		
Poliedros regulares	Poliedro con todas las caras polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.	Tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, e icosaedro.	
Prisma. Volumen			
Pirámide. Volumen			
Cilindro. Volumen			Un cilindro de radio 3 m y altura 5 m tiene un volumen de $45\pi \text{ m}^3$, y una superficie lateral de $30\pi \text{ m}^2$.
Cono. Volumen			
Esfera. Superficie. Volumen		Un cono de radio 3 m y altura 5 m, tiene un volumen de $15\pi \text{ m}^3$. Una esfera de radio 3 tiene un volumen de $36\pi \text{ m}^3$, y una superficie de $36\pi \text{ m}^2$.	

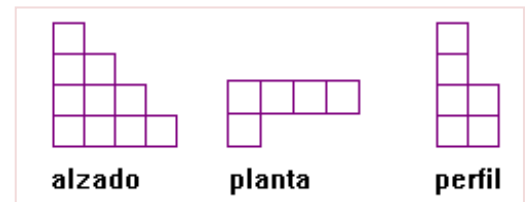
EJERCICIOS Y PROBLEMAS**El espacio**

1. Dibuja en tu cuaderno la planta, perfil y alzado de una silla.
2. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:
 - a) Una pirámide recta hexagonal con cortes paralelos a su base
 - b) Un cono con cortes paralelos a su base
 - c) Un cono recto con cortes paralelos a su altura
 - d) Una prisma cuadrangular con cortes paralelos a una cara
3. Mira a tu alrededor y escribe en tu cuaderno el nombre de cinco objetos indicando su descripción geométrica.
4. Dibuja una mesa en perspectiva caballera.



5. Si construyes un cubo con el desarrollo de la figura, la cara opuesta a la letra F sería....

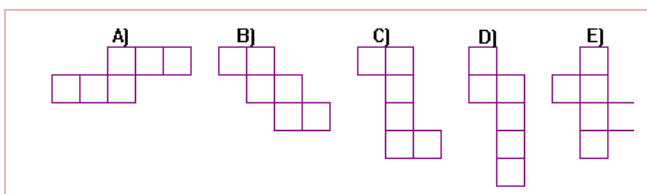
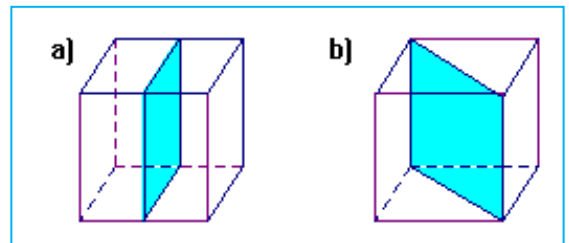
6. Hemos construido un cuerpo formado por cubitos pequeños. Hemos dibujado su perfil, planta y alzado, ¿cuántos cubos hemos utilizado?
7. Dibuja en tu cuaderno un tetraedro. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:



- a) Tres pares de rectas que se crucen. ¿Cuáles son? Descríbelas.
 - b) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.
 - c) ¿Existen rectas paralelas?
8. En el dibujo del tetraedro anterior, ¿cuántos planos hay? ¿Hay planos paralelos? Indica dos planos secantes señalando en qué recta se cortan.

Poliedros

9. ¿Puede existir un poliedro regular que sus caras sean hexágonos? ¿En un vértice, cuál es el número mínimo de polígonos que debe haber? El ángulo exterior del hexágono es de 120° , ¿cuánto vale la suma de 3 ángulos?
10. Utiliza una trama de triángulos y dibuja en ella 6 rombos de ángulos 60° y 120° . Haz con ellos el desarrollo de un poliedro, y constrúyelo. Es un romboedro.
11. En una trama triangular recorta 2 triángulos. ¿Puedes construir con ellos un poliedro? ¿Y con 4? Recorta 5 e intenta construir un poliedro. Ahora con 6. Es un trabajo difícil. El mayor que podrías construir es con 20. Sabrías dar una explicación.
12. Piensa en un cubo. Cuenta sus caras, sus aristas y sus vértices. Anota los resultados en tu cuaderno. Comprueba si verifica la relación de Euler: Vértices más caras igual a Aristas más 2. Haz lo mismo pensando en un prisma hexagonal y en una pirámide triangular.
13. Un balón de fútbol, ¿es un poliedro? Descríbelo.
14. Construye muchos, muchísimos poliedros. Por lo menos 5. Puedes hacerlo de distintas formas: Con su desarrollo en cartulina; con pajas de refresco, hilo y pegamento; con limpiapipas y plastilina... ¡Seguro que se te ocurren otras formas!
15. Comprueba que al unir los centros de las caras de un cubo se obtiene un octaedro, y viceversa, si se unen los centros de las caras de un octaedro se obtiene un cubo. Se dice que son duales. Comprueba que al unir los centros de las caras de un icosaedro se obtiene un dodecaedro, y viceversa. El icosaedro y el dodecaedro son duales. ¿Qué se obtiene si se unen los centros de las caras de un tetraedro? ¿Qué poliedro es dual al tetraedro?
16. De muchas formas es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, como por ejemplo mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, o mediante un plano que pase por el punto medio de cuatro aristas, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de la sección del cubo de la figura b), y construye dos de esas secciones. Descríbelos. Piensa otros dos ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.



17. ¿Cuál de los siguientes desarrollos no puede ser el desarrollo de un cubo? Razona la respuesta. Sólo existen 11 posibilidades de desarrollos del cubo diferentes. Busca al menos tres más.

18. ¿Cuántas diagonales tiene un cubo? Una diagonal es un segmento que une dos vértices que no estén en la misma cara.

19. Piensa en un cubo. Imagina que cortas una de sus esquinas creando una sección con forma de triángulo equilátero. Imagina que sigues cortando mediante planos paralelos, ¿qué obtienes?, ¿con qué corte consigues el mayor triángulo equilátero? Y si continúas cortando, ¿qué sucede? ¿Se puede obtener un hexágono regular? (Ayuda: Si no eres capaz de imaginar tanto puedes cortar un cubo de plastilina).

20. Dibuja en tu cuaderno tres tomografías diferentes de un cubo.
21. De qué manera puedes obtener con un único corte de un cubo, dos prismas triangulares rectos.
22. Calcula la diagonal de un ortoedro de lados 8, 3 y 5 cm.
23. Escribe 3 objetos cotidianos que sean prismas cuadrangulares. Los prismas cuadrangulares se llaman también paralelepípedos, y si sus caras son rectángulos se llaman ortoedros. De los objetos que has señalado, ¿cuáles son paralelepípedos y cuáles son ortoedros?
24. Dibuja en tu cuaderno un prisma triangular y uno pentagonal señalando las caras laterales, bases,, aristas, vértices y altura.
25. Observa, en un prisma, ¿cuántas caras concurren en un vértice? ¿Es siempre el mismo número?
26. Un prisma puede tener muchas caras, pero ¿cuál es su número mínimo?
27. Dibuja el desarrollo de una pirámide recta cuadrangular, y de otra hexagonal.
28. Dibuja una pirámide recta pentagonal y señala su vértice, sus aristas, sus caras laterales, su base y su altura.
29. Piensa en un poliedro que tenga 5 caras y 5 vértices. ¿Qué tipo de poliedro es?
30. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma hexagonal regular? ¿Y una pirámide hexagonal regular?
31. Dibuja en perspectiva una pirámide pentagonal regular. Dibuja su perfil, su planta y su alzado. Dibuja una tomografía cortando por un plano paralelo a la base.
32. Construye un pirámide regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja la base sin cerrar. Construye un prisma regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja una base sin cerrar. Llena de arena (o similar) la pirámide y viértelo dentro del prisma, y cuenta cuántas veces necesitas hacerlo para llenar el prisma.
33. Si en una pirámide pentagonal regular su apotema mide 10 cm y el lado de su base 4 cm, ¿cuánto mide su arista?
34. ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide pentagonal regular cuya altura mide 5 m, y cuya base está inscrita en una circunferencia de 2 m de radio?
35. Calcula el volumen de un cono de generatriz 8 cm y radio de la base 3 cm.
36. Calcula el volumen de un tronco de cono recto si los radios de las bases miden 9 y 5 cm y la generatriz, 6 cm.
37. Calcula la superficie lateral y total de un prisma regular hexagonal de altura 12 cm y lado de la base 6 cm.
38. Calcula la superficie total de un tronco de cono de pirámide regular triangular de lados de las bases 8 y 4 cm, y arista 6 cm.
39. Un cilindro recto tiene una superficie lateral de $67\pi \text{ cm}^2$. ¿Cuánto mide su superficie total si su altura mide 10 cm?

Cuerpos redondos

40. Dibuja en tu cuaderno los cuerpos que se generan al girar alrededor de:
- un lado, un rectángulo
 - un cateto, un triángulo rectángulo
 - la hipotenusa, un triángulo rectángulo
 - su diámetro, una círculo.
41. Escribe el nombre de 5 objetos que tengan forma de cilindro.
42. Dibuja un cilindro oblicuo y señala las bases, la cara lateral, la altura.
43. Construye un cilindro recto en cartulina que tenga de radio de la base 1 cm y altura 2 cm.
44. Dibuja en perspectiva caballera un cilindro recto. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja 2 tomografías tomando un plano paralelo a) a la base, b) a una arista.
45. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de cono.
46. Dibuja en perspectiva caballera un cono oblicuo. Dibuja su planta, perfil y alzado. Señala su base, su altura y su cara lateral.
47. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de esfera.
48. Dibuja una esfera en perspectiva caballera. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja una tomografía de la esfera.
49. Calcula el radio de la esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 cm.
50. Calcula el radio de la esfera inscrita y circunscrita a un tetraedro de lado 10 cm.
51. Calcula el área total y el volumen de un cubo de 10 cm de lado.
52. Calcula la superficie de cada uno de los poliedros regulares sabiendo que su arista mide 8 cm. (Ayuda: La apotema del pentágono mide 5,4 cm).
53. Si llenas de arena un cono recto de 7 cm de altura y de radio de la base de 4 cm, y lo vacías en un cilindro recto de 4 cm de radio de la base, ¿qué altura alcanzará la arena?
54. Calcula la superficie y el volumen de una esfera cuya circunferencia máxima mide 10π m.
55. Calcula el volumen y la superficie de una esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 m.
56. Calcula la superficie lateral de un cilindro circunscrito a una esfera de radio R. Calcula la superficie de dicha esfera. Cuánto vale si $R = 6$ cm.
57. Un cono tiene de altura $h = 7$ cm, y radio de la base $r = 2$ cm. Calcula su volumen, su generatriz y su superficie lateral.
58. Calcula la superficie lateral y total de un cilindro recto generado por un rectángulo de lados 3 y 8 cm al girar alrededor de su lado mayor.
59. Calcula la superficie lateral y total de un cono recto generado por un triángulo rectángulo de catetos 3 y 8 cm al girar alrededor de su cateto menor.
60. Duplicamos la arista de un cubo, ¿qué ocurre con la superficie de una cara?, ¿y con su volumen? Cálculalo suponiendo que duplicas la arista de un cubo de lado 5 m.
61. Un depósito cilíndrico tiene una capacidad de 100 L y una altura de 100 cm, ¿cuánto mide el radio de su base?

AUTOEVALUACIÓN

- ¿Cuál de los siguientes cuerpos geométricos NO tiene un desarrollo plano?
 - el cilindro
 - la esfera
 - el icosaedro
 - el dodecaedro
- La definición correcta de poliedro regular es:
 - Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares
 - Un poliedro con todas sus caras polígonos iguales
 - Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares e iguales
 - Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares iguales y que en cada vértice concurren el mismo número de caras.
- Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta
 - Un prisma oblicuo puede ser regular
 - El volumen de un prisma oblicuo es área de la base por la altura
 - Las caras de un dodecaedro son hexágonos
 - El volumen de una pirámide es área de la base por la altura
- Una expresión de la superficie lateral de un cilindro es:
 - $2\pi rh$
 - $2\pi rh + \pi r^2$
 - $2\pi r(h + r)$
 - $2/3\pi rh$
- El número de vértices de un icosaedro es:
 - 20
 - 12
 - 30
 - 10
- El volumen y la superficie lateral de un prisma regular hexagonal de altura 8 cm y lado de la base 2 cm, miden aproximadamente:
 - $83,1 \text{ cm}^3$; 96 cm^2
 - $35,7 \text{ cm}^3$; 48 cm^2
 - 0,1 L; 0,9 ha
 - 106 m^3 ; 95 m^2
- El volumen y la superficie lateral de una pirámide regular hexagonal de altura 2 m y lado de la base 4 m, miden aproximadamente:
 - 62 cm^3 ; 24 cm^2
 - 7000 L; 0,48 ha
 - 7 cm^3 ; 8 cm^2
 - $27,6 \text{ m}^3$; 48 m^2
- El volumen de un cono de altura 9 cm y radio de la base 2 cm, miden:
 - $0,12\pi \text{ L}$
 - $36\pi \text{ cm}^3$
 - $12 \pi \text{ cm}^3$
 - $36\pi \text{ cm}^3$
- El volumen y la superficie lateral de un cilindro de altura 4 cm y radio de la base 5 cm, miden:
 - $100\pi \text{ m}^3$; $40\pi \text{ m}^2$
 - $100\pi \text{ cm}^3$; $40\pi \text{ cm}^2$
 - $31,4 \text{ cm}^3$; $12,56 \text{ cm}^2$
 - $33\pi \text{ cm}^3$; $7\pi \text{ cm}^2$
- El volumen y la superficie de una esfera de radio 6 cm miden:
 - $288\pi \text{ cm}^3$; $144\pi \text{ cm}^2$
 - $144\pi \text{ cm}^3$; $288\pi \text{ cm}^2$
 - 452 m^3 ; 904 m^2
 - $96\pi \text{ cm}^3$; $48\pi \text{ cm}^2$