6 Proporcionalidad

MIDE Y COMPRUEBA

Vitrubio (siglo I a. C.) fue un arquitecto de Julio César e ingeniero. En este fragmento hace un recorrido por algunas proporciones del cuerpo humano. Comprueba en tu propio cuerpo si cumples las proporciones descritas.

Respuesta libre

En el dibujo de Leonardo aparece un hombre, el propio Leonardo, en dos posiciones que encajan en un cuadrado y en un círculo. ¿Cumple las proporciones dadas por Vitrubio?

El dibujo de Leonardo cumple las condiciones dadas por Vitrubio.

La circunferencia, con centro en el obligo, toca la punta de ambas manos y los dedos de los pies, cuando el hombre tiene sus manos y sus pies estirados. Además, la anchura del hombre coincide con su altura, pues ambos miden el lado de un cuadrado.

ANALIZA Y SACA CONCLUSIONES

Vitrubio también afirma que los templos deben tener simetría y proporción como en el cuerpo humano. Busca ejemplos en que esas proporciones aparecen en obras de arte: escultura, arquitectura, pintura…

Existen múltiples ejemplos, entre los que destacan: la escultura El David de Miguel Ángel, el cuadro la Gioconda o Mona Lisa de Leonardo da Vinci, el Partenón de Atenas, pirámides de Egipto…

Actividades propuestas

1. **Indica si las siguientes parejas de magnitudes son o no directamente proporcionales.**

   a) La distancia, en centímetros, que separa a dos ciudades en un mapa y la distancia real, en kilómetros, que hay entre ellas.

   b) Cantidad de alimento y tiempo que podrá sobrevivir un náufrago.

   c) El área de un rectángulo y su perímetro.

   d) En una fiesta de cumpleaños hay una determinada cantidad de refrescos. Número de invitados y número de refrescos que podrá beber cada uno.

   a) Son magnitudes directamente proporcionales, puesto que al duplicarse, triplicarse…la distancia en el mapa, la distancia real también se duplica, triplica. Además el duplicarse, triplicarse… la distancia real entre dos ciudades, la distancia en el mapa también se duplica, triplica…

   b) Son magnitudes directamente proporcionales, si el náufrago come la misma cantidad de comida todos los días, ya que si tuviera el doble de comida, ésta le duraría el doble.

   c) No son magnitudes directamente proporcionales, ya que a doble de área no le corresponde doble de perímetro.

   Por ejemplo, si las dimensiones de un rectángulo son 2 x 1 cm el área es 2 cm^2 y su perímetro 6 cm. En cambio un rectángulo con dimensiones 4 x 1 cm tiene un área doble que el anterior, 4 cm^2, pero su perímetro, que es 10 cm, no es el doble del anterior.

   d) No son magnitudes directamente proporcionales ya que si hay doble de invitados a la fiesta, cada uno podrá beber la mitad de refrescos, no el doble.

2. **Actividad resuelta**

3. Indica si esta tabla representa magnitudes directamente proporcionales. En caso afirmativo, calcula el valor de la constante de proporcionalidad.

X	**5**	**15**	**18**	**19**
Y	**25**	**75**	**90**	**95**

Se calculan los cocientes correspondientes: $\frac{25}{5}=\frac{75}{15}=\frac{90}{18}=\frac{95}{19}=5$

Como los cocientes entre las cantidades correspondientes son siempre iguales, los valores de la tabla son directamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad de *Y* respecto *X* es k = 5.

4. Realiza los siguientes repartos:

a) 7230 de forma directamente proporcional a 2, 4 y 9.

b) 44 650 de forma directamente proporcional a 6, 8, 12 y 21.

a) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k=\frac{7230}{2+4+9}=482\Rightarrow\begin{cases}2\Rightarrow 482\cdot 2=964\\4\Rightarrow 482\cdot 4=1928\\9\Rightarrow 482\cdot 9=4338\end{cases}$$

b) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k=\frac{44\,650}{6+8+12+21}=950\Rightarrow\begin{cases}6\Rightarrow 6\cdot 950=5700\\8\Rightarrow 8\cdot 950=7600\\12\Rightarrow 12\cdot 950=11\,400\\21\Rightarrow 21\cdot 950=19\,950\end{cases}$$

5. Actividad resuelta

6. Una piscina de 175 m^3 tarda en llenarse 35 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse otra piscina que tiene 75 m^3 más de volumen?

Las magnitudes volumen de una piscina, *Y*, y tiempo que tarda en llenarse la piscina, *X*, son directamente proporcionales, por lo que se puede establecer la proporción:

$$\frac{175}{35}=\frac{250}{x}\Rightarrow x=\frac{35\cdot 250}{175}=50$$

Tardará en llenarse 50 horas.

7. En casa de Omar hay una gotera que ha llenado 10 cm de un cubo de 30 cm de altura en 8 horas. Si sigue lloviendo igual, durante 3 horas más, ¿necesitará otro cubo?

Las magnitudes tiempo que llueve, *Y*, y altura del cubo que alcanza el agua, *X*, son directamente proporcionales, por lo que se puede establecer la proporción:

$$\frac{8}{10}=\frac{3}{x}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 10}{8}=3{,}75$$

El cubo de 30 cm se ha llenado 3,75 cm más, por lo que el agua alcanzará 13,75 cm del. Por tanto, no hará falta otro cubo.

8. Actividad resuelta

9. Una subvención de 322 000 € de la Unión Europea se reparte entre tres localidades proporcionalmente al número de trabajadores que se dedican a tareas agrícolas. Una de las localidades recibe el doble que otra y la mitad que la tercera.

a) ¿Cuánto dinero recibe cada una?

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

a) Una localidad recibe, en euros, $2x$, otra segunda x y otra tercera $4x$.

$$k = \frac{322\,000}{2x+x+4x} = \frac{322\,000}{7x} = \frac{46\,000}{x} \Rightarrow \begin{cases} 2x \Rightarrow 2x \cdot \dfrac{46\,000}{x} = 92\,000 \\ x \Rightarrow x \cdot \dfrac{46\,000}{x} = 46\,000 \\ 4x \Rightarrow 4x \cdot \dfrac{46\,000}{x} = 184\,000 \end{cases}$$

b) La constante de proporcionalidad es $k = \dfrac{46\,000}{x}$, donde x es el dinero que recibe la segunda localidad.

10. Calcula los siguientes porcentajes.

a) El 18 % de 12 500

b) El 25 % de 1600

c) El 4 % de 4

d) El 75 % de 0,25

e) El 0,3 % de 0,3

f) El 125 % de 4600

a) 18 % de 12 500 = 0,18 · 12 500 = 2250

b) 25 % de 1600 = 0,25 · 1600 = 400

c) El 4 % de 4 = 0,04 · 4 = 0,16

d) 75 % de 0,25 = 0,75 · 0,25 = 0,1875

e) 0,3 % de 0,3 = 0,0009

f) 125 % de 4600 = 1,25 · 4600 = 5750

11. Completa en tu cuaderno los términos que faltan en las siguientes igualdades.

a) El 2 % de 45 000 es ●●●.

b) El ●●● % de 3600 es 900.

c) El 40 % de ●●● es 20.

d) El ●●● % de 850 es 144,5

a) 2 % de 45 000 = $x \Rightarrow$ 0,02 · 45 000 = $x \Rightarrow x = 900$

b) x % de 3600 = 900 $\Rightarrow \dfrac{x}{100} \cdot 3600 = 900 \Rightarrow x = \dfrac{900 \cdot 100}{3600} = 25$

c) 40 % de x = 20 $\Rightarrow 0{,}4x = 20 \Rightarrow x = 50$

d) x % de 850 = 144,5 $\Rightarrow \dfrac{x}{100} \cdot 850 = 144{,}5 \Rightarrow x = \dfrac{144{,}5 \cdot 100}{850} = 17$

12. Realiza los siguientes aumentos porcentuales.

a) 135 en un 22 %

b) 1750 en un 3 %

c) 120 000 en un 12,5 %

d) 4200 en un 120 %

a) El índice de variación de un aumento del 22 % es 1,22 $\Rightarrow$ 135 · 1,22 = 164,7.

b) El índice de variación de un aumento del 3 % es 1,03 $\Rightarrow$ 1,03 · 1,1750 = 1802,5.

c) El índice de variación de un aumento del 12,5 % es 1,125 $\Rightarrow$ 120 000 · 1,125 = 135 000.

d) El índice de variación de un aumento del 120 % es 2,2 $\Rightarrow$ 4200 · 2,2 = 9240.

13. Realiza las siguientes disminuciones porcentuales.

a) 1200 en un 16 %

b) 7500 en un 23 %

c) 120 000 en un 12,5 %

d) 4200 en un 0,25 %

a) El índice de variación de una disminución del 16 % es 0,84 $\Rightarrow$ 1200 · 0,84 = 1008.

b) El índice de variación de una disminución del 23 % es 0,77 $\Rightarrow$ 7500 · 0,77 = 5775.

c) El índice de variación de una disminución del 12,5 % es 0,875 $\Rightarrow$ 120 000 · 0,875 = 105 000.

d) El índice de variación de una disminución del 0,25 % es 0,9975 $\Rightarrow$ 4200 · 0,9975 = 4189,5.

14. En clase hay 10 alumnos morenos y 7 rubios. ¿Qué porcentaje representa el número de morenos?

En total hay 17 alumnos.

$\frac{10}{17} = 0{,}59 \Rightarrow$ El 59 % de los alumnos son morenos.

15. En una bolsa de pajitas hay 35 pajitas amarillas, 27 azules, 15 rojas y 18 verdes. Halla el porcentaje de pajitas de cada color.

La bolsa contiene 95 pajitas.

Amarillas: $\frac{35}{95} = 0{,}37 \Rightarrow$ El 37 % son amarillas.

Azules: $\frac{27}{95} = 0{,}28 \Rightarrow$ El 28 % son azules.

Rojas: $\frac{15}{95} = 0{,}16 \Rightarrow$ El 16 % son rojas.

Verdes: $\frac{18}{95} = 0{,}19 \Rightarrow$ El 19 % son verdes.

16. Indica en cada caso qué porcentaje aumenta o disminuye una cantidad al multiplicarla por estos números:

a) **0,9** **d)** **0,02** **g)** **1,104**

b) **1,2** **e)** **1,02** **h)** **2,02**

c) **1,53** **f)** **0,0012** **i)** **0,00058**

a) Disminuye un 10 %.

b) Aumenta un 20 %.

c) Aumenta un 53 %.

d) Disminuye un 98 %.

e) Aumenta un 2 %.

f) Disminuye un 99,88 %.

g) Aumenta un 10,4 %.

h) Aumenta un 102 %.

i) Disminuye un 99,942 %.

17. Actividad resuelta

18. Antonio ha encajado 20 goles esta temporada, lo que supone un descenso del 20 % con respecto a la pasada. ¿Cuántos goles recibió la temporada pasada?

Se desconoce la cantidad inicial C_I, la final es C_F = 20.y el índice de variación es 0,8.

$$C_F = 0{,}8 \cdot C_I \Rightarrow C_I = \frac{C_F}{0{,}8} = \frac{20}{0{,}8} = 25$$

La temporada pasada recibió 25 goles.

19. Actividad resuelta

20. Halla el precio final de unos pantalones que costaban inicialmente 30 € a los que se les ha aplicado dos rebajas sucesivas del 20 % y del 30 %.

El índice de variación de una rebaja del 20% es 0,8 y, el de una rebaja del 30%, es 0,7.

El precio final será 30 · 0,8 · 0,7 = 16,8 €.

21. Activad interactiva

22. Calcula los intereses y el capital final obtenidos al depositar en una entidad bancaria 4000 € a un interés simple anual del 3,5 % durante 8 años.

Los intereses producidos por un capital de 4000 € depositados durante 8 años al 3,5% serán:

$$I = \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = \frac{4000 \cdot 3{,}5 \cdot 8}{100} = 1120$$

El capital final al período será $C_F = C_I + I$ = 4000 + 1120 = 5120 €.

23. Halla el capital final en que se convierten 650 € en tres años a un interés simple del:

a) 4 % **b) 12 %** **c) 2,25 %** **d) 1,75 %**

a) El capital final será 728 €.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 650 + \frac{650 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 650 + 78 = 728$$

b) El capital final será 884 €.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 650 + \frac{650 \cdot 12 \cdot 3}{100} = 650 + 234 = 884$$

c) El capital final será 693,88 €.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 650 + \frac{650 \cdot 2{,}25 \cdot 3}{100} = 650 + 43{,}875 = 693{,}875 \approx 693{,}88$$

d) El capital final será 684,13 €.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 650 + \frac{650 \cdot 1{,}75 \cdot 3}{100} = 650 + 34{,}125 = 684{,}125 \approx 684{,}13$$

24. Calcula el capital final que se obtendrá al colocar 1250 € durante 5 años a un interés del 4 % en los casos de:

a) Interés simple **b) Interés compuesto**

a) Con interés simple, el capital final será 1500 €.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 1250 + \frac{1250 \cdot 4 \cdot 5}{100} = 1250 + 250 = 1500$$

b) Con interés compuesto, el capital final será 1520,82 €.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 1250 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 1520{,}82$$

25. Calcula el capital final en que se convierte la cantidad de 15 000 € en 4 años a un interés compuesto del:

a) 6 % **b) 18 %** **c) 4,5 %** **d) 6,25 %**

a) El capital final será 18 937,15 €.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^4 = 18\,937{,}15$$

b) El capital final será 29 081,67 €.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{18}{100}\right)^4 = 29\,081{,}67$$

c) El capital final será 18 692,73 €.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{4{,}5}{100}\right)^4 = 17\,887{,}78$$

d) El capital final será 19 116,44 €.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{6{,}25}{100}\right)^4 = 19\,116{,}44$$

26. Esther coloca 1000 € a un interés simple del 10 % y Eva coloca otros 1000 € a un interés compuesto del 10 %. ¿Qué diferencia hay entre los capitales que obtendrán cada una al cabo de 1 año?

Al cabo de un año Esther obtendrá $C_F = 1000 + \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1100$ € y Eva $C_F = 1000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^1 = 1100$ €.

Al cabo de un año no habrá ninguna diferencia entre los capitales que obtendrán cada una.

27. Actividad resuelta

28. Un capital de 1500 € se ha colocado durante dos años a interés compuesto y se ha obtenido un capital final de 1717,35 €. ¿Cuál es el tipo de interés que se ha aplicado?

$$C_F = C_I \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow 1717{,}35 = 1500 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow \frac{1717{,}35}{1500} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow 0{,}07 = \frac{r}{100} \Rightarrow r = 7$$

Se ha aplicado un interés compuesto del 7 %.

29. ¿Durante cuántos años se ha colocado un capital de 2800 € a un interés simple del 5 % para obtener al final del período 3780 €?

$$C_F = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} \Rightarrow 3780 = 2800 + \frac{2800 \cdot 5 \cdot t}{100} \Rightarrow 3780 = 2800 + 140t \Rightarrow 3780 - 2800 = 140t \Rightarrow 980 = 140t \Rightarrow t = 7$$

El capital se ha colocado durante 7 años.

30. Una entidad bancaria lanza una oferta que consiste en que al colocar un capital a interés compuesto de dos años, a los primeros 1000 € se le aplicará un tipo de interés del 8 % y al resto un tipo del 4 %. Rafaela ha invertido 5000 € con esta oferta. ¿Qué capital final obtendrá?

De los 5000 € que Rafaela ha colocado, 1000 € se colocan a un interés del 8 % y, 4000 €, a un interés del 4 %.

$$C_F = 1000 \cdot \left(1+\frac{8}{100}\right)^2 + 4000 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^2 = 1166{,}4 + 4326{,}4 = 5492{,}8 \text{ €}$$

Rafaela obtendrá un capital final de 5492,8 €.

31. Un capital de 6000 € se ha dividido en dos partes. El 70 % del total se ha colocado a un interés del 5 % y el resto aun interés del 8 %. La operación ha durado un solo año. ¿Cuál será el capital final obtenido?

De los 6000 € que se han colocado, 4200 € se colocan a un interés del 5 % y, 1800 €, a un interés del 8 %. Como la operación sólo ha durado un año, es indiferente que sea a interés simple o a interés compuesto.

$$C_F = 4200 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right) + 1800 \cdot \left(1+\frac{8}{100}\right) = 4410 + 1944 = 6354 \text{ €}$$

El capital final obtenido será 6354 €.

32. Actividad interactiva

33. Razona, en cada caso, si los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos relaciones.

a) Los kilómetros que hace andando un senderista con una velocidad de 5 km/h y el tiempo que tarda en hacerlos.

b) El tiempo que tarda un senderista en recorrer 12 km y la velocidad constante que lleva.

c) Los kilómetros que hace un senderista durante 2 horas y la velocidad constante que lleva.

d) La velocidad que lleva un senderista que recorre 12 km y el tiempo que tarda.

a) Directamente proporcionales. A doble distancia que recorrer, tarda el doble de tiempo en recorrerla.

b) Inversamente proporcionales. A doble velocidad, tarda la mitad de tiempo en recorrer 12 km.

c) Directamente proporcionales. A doble distancia, doble velocidad debe llevar para recorrer 2 km.

d) Inversamente proporcionales. A doble velocidad, tarda la mitad de tiempo en recorrer 12 km.

34. Actividad resuelta

35. Indica si estas tablas representan magnitudes inversamente proporcionales. En caso afirmativo, halla la constante de proporcionalidad.

a)

X	**3**	**5**	**9**	**12**
Y	**20**	**12**	**6**	**5**

b)

X	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{7}$
Y	**–9**	$\frac{24}{5}$	$-\frac{9}{2}$	**42**

a) Se calculan los productos correspondientes:

$3 \cdot 20 = 5 \cdot 12 \neq 9 \cdot 6$

Como los productos no son iguales, las magnitudes *X* e *Y* no son inversamente proporcionales.

b) Se calculan los productos correspondientes:

$$\frac{2}{3} \cdot (-9) = -\frac{5}{4} \cdot \frac{24}{5} = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{-1}{7} \cdot 42 = -6$$

Como los productos son iguales, las magnitudes *X* e *Y* son inversamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad inversa es $k = -6$.

36. Con una cierta cantidad de dinero, se pueden comprar 20 bolígrafos a 60 CENT la unidad. Con la misma cantidad de dinero, ¿cuántos bolígrafos se podrán comprar si su precio ha aumentado a 75 CENT?

Las magnitudes precio de los bolígrafos y número de bolígrafos que se pueden comprar con una cantidad fija son magnitudes inversamente proporcionales.

Llamando *x* al número de bolígrafos que se pueden comprar:

$$60 \cdot 20 = 75 \cdot x \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 20}{75} = 16$$

Si el precio de los bolígrafos aumenta, se podrán comprar 16 bolígrafos.

37. En un concurso de preguntas rápidas de cultura general se otorga un premio inversamente proporcional al tiempo que un concursante tarda en responder correctamente a 10 preguntas. Si el ganador ha tardado 5 min y 20 s y ha recibido un premio de 150 €, ¿cuánto habrá tardado el segundo clasificado sabiendo que le han correspondido 75 € de premio?

Las magnitudes premio que gana y tiempo que tarda en contestar son magnitudes inversamente proporcionales.

Llamando *x* al tiempo que ha tardado el segundo clasificado:

$$320 \cdot 150 = 75 \cdot x \Rightarrow x = \frac{320 \cdot 150}{75} = 640$$

El segundo clasificado habrá tardado 640 s. Es decir, 10 min 40 s.

38. Actividad resuelta

39. Realiza los siguientes repartos:

a) 10 850 inversamente proporcional a 2, 3 y 5.

b) 1690 inversamente proporcional a $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$.

a) Calculamos la constante de proporcionalidad inversa y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k = \frac{10\,850}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 10\,500 \Rightarrow \begin{cases} 2 \Rightarrow 10\,500 \cdot \frac{1}{2} = 5250 \\ 3 \Rightarrow 10\,500 \cdot \frac{1}{3} = 3500 \\ 5 \Rightarrow 10\,500 \cdot \frac{1}{5} = 2100 \end{cases}$$

b) Calculamos la constante de proporcionalidad inversa y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k = \frac{1690}{3+4+6} = 130 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \Rightarrow 130 \cdot 3 = 390 \\ \frac{1}{4} \Rightarrow 130 \cdot 4 = 520 \\ \frac{1}{6} \Rightarrow 130 \cdot 6 = 780 \end{cases}$$

40. Ángel va a repartir 80 entradas para el concierto de los PitaROCK entre sus tres sobrinos de forma inversamente proporcional al número de horas que han visto la televisión en un fin de semana.

Calculamos la constante de proporcionalidad inversa y el número de entradas que le corresponde a cada uno:

$$k = \frac{80}{\frac{1}{10} + 1 + \frac{1}{2}} = 50 \Rightarrow \begin{cases} 10 \text{ h} \Rightarrow 50 \cdot \frac{1}{10} = 5 \text{ entradas} \\ 1 \text{ h} \Rightarrow 50 \cdot 1 = 50 \text{ entradas} \\ 2 \text{ h} \Rightarrow 50 \cdot \frac{1}{2} = 25 \text{ entradas} \end{cases}$$

41. Calcula el valor de x en cada caso.

a) $\frac{2 \cdot 16}{4 \cdot 13} = \frac{100}{x}$ **b)** $\frac{21 \cdot 4}{5 \cdot 12} = \frac{7}{x}$

$\frac{2 \cdot 16}{4 \cdot 13} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 4 \cdot 13}{2 \cdot 16} = 162{,}5$

b) $\frac{21 \cdot 4}{5 \cdot 12} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 5 \cdot 12}{21 \cdot 4} = 5$

42. Actividad resuelta

43. Trabajando 5 horas, 5 amigos realizan 15 pulseras de hilo. ¿Cuántos amigos deberían dedicarse a hacer 72 pulseras si sólo pueden trabajar 4 horas?

La relación de las magnitudes horas y número de amigos es inversamente proporcional y la de las magnitudes número de pulseras y número de amigos es directamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

5 horas $\Rightarrow$ 15 pulseras $\Rightarrow$ 5 amigos

1 hora $\Rightarrow$ 15 pulseras $\Rightarrow$ 25 amigos

1 hora $\Rightarrow$ 1 pulsera $\Rightarrow$ $\frac{25}{15}$ amigos

4 horas $\Rightarrow$ 1 pulsera $\Rightarrow$ $\frac{25}{60}$ amigos

4 horas $\Rightarrow$ 72 pulseras $\Rightarrow$ 30 amigos

- Método de la regla de tres:

5 horas $\Rightarrow$ 15 pulseras $\Rightarrow$ 5 amigos

4 horas $\Rightarrow$ 72 pulseras $\Rightarrow$ x amigos

$\frac{15 \cdot 4}{72 \cdot 5} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 72 \cdot 5}{15 \cdot 4} = 30$ amigos

44. El alquiler de 3 apartamentos en la playa durante 7 días cuesta 1260 €. ¿Cuánto costará el alquiler de 5 apartamentos durante 15 días?

La relación de las magnitudes número de apartamentos y precio es directamente proporcional y la de las magnitudes número de días y precio es directamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

  3 apartamentos $\Rightarrow$ 7 días $\Rightarrow$ 1260 €

  1 apartamento $\Rightarrow$ 7 días $\Rightarrow$ 420 €

  1 apartamento $\Rightarrow$ 1 día $\Rightarrow$ 60 €

  5 apartamentos $\Rightarrow$ 1 día $\Rightarrow$ 300 €

  5 apartamentos $\Rightarrow$ 15 días $\Rightarrow$ 4500 €

- Método de la regla de tres:

  3 apartamentos $\Rightarrow$ 7 días $\Rightarrow$ 1260 €

  5 apartamentos $\Rightarrow$ 15 días $\Rightarrow$ x €

  $$\frac{3\cdot 7}{5\cdot 15}=\frac{1260}{x}\Rightarrow x=\frac{1260\cdot 5\cdot 15}{3\cdot 7}=4500\text{ €}$$

45. Para limpiar un monte en 5 días se necesitan 8 personas trabajando 6 horas al día. ¿Cuántos días tardarán 6 personas si trabajan 5 h al día?

La relación de las magnitudes número de personas y número de días es inversamente proporcional y la de las magnitudes número de horas y número de días es inversamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

  8 personas $\Rightarrow$ 6 horas $\Rightarrow$ 5 días

  1 persona $\Rightarrow$ 6 horas $\Rightarrow$ 40 días

  1 persona $\Rightarrow$ 1 hora $\Rightarrow$ 240 días

  6 personas $\Rightarrow$ 1 hora $\Rightarrow$ 40 días

  6 personas $\Rightarrow$ 5 horas $\Rightarrow$ 8 días

- Método de la regla de tres:

  8 personas $\Rightarrow$ 6 horas $\Rightarrow$ 5 días

  6 personas $\Rightarrow$ 5 horas $\Rightarrow$ x días

  $$\frac{6\cdot 5}{8\cdot 6}=\frac{5}{x}\Rightarrow x=\frac{5\cdot 8\cdot 6}{6\cdot 5}=8\text{ días}$$

46. Elena tarda 12 días en leer un libro de 400 páginas leyendo 60 min cada día.

a) ¿Cuántos días tardará en leer el mismo libro pero leyendo 90 min cada día?

b) ¿Cuántas páginas tendrá otro libro si leyendo 45 min al día ha tardado 10 días en terminarlo?

a) La relación de las magnitudes número páginas y número de días es directamente proporcional y la de las magnitudes minutos cada día y número de días es inversamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

  400 páginas $\Rightarrow$ 60 minutos $\Rightarrow$ 12 días

  400 páginas $\Rightarrow$ 1 minuto $\Rightarrow$ 720 días

  400 páginas $\Rightarrow$ 90 minutos $\Rightarrow$ 8 días

- Método de la regla de tres:

  400 páginas $\Rightarrow$ 60 minutos $\Rightarrow$ 12 días

  400 páginas $\Rightarrow$ 90 minutos $\Rightarrow$ x días

  $$\frac{400\cdot 90}{400\cdot 60}=\frac{12}{x}\Rightarrow x=\frac{60\cdot 12}{90}=8\text{ días}$$

b) La relación de las magnitudes número de días y número de páginas es directamente proporcional y la de las magnitudes minutos cada día y número de páginas es directamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

  12 días $\Rightarrow$ 60 minutos $\Rightarrow$ 400 páginas

  1 día $\Rightarrow$ 60 minutos $\Rightarrow$ $\frac{400}{12}$ páginas

  1 día $\Rightarrow$ 1 minuto $\Rightarrow$ $\frac{400}{720}$ páginas

  10 días $\Rightarrow$ 1 minuto $\Rightarrow$ $\frac{4000}{720}$ páginas

  10 días $\Rightarrow$ 45 minutos $\Rightarrow$ 250 páginas

- Método de la regla de tres:

  12 días $\Rightarrow$ 60 minutos $\Rightarrow$ 400 páginas

  10 días $\Rightarrow$ 45 minutos $\Rightarrow$ x páginas

  $$\frac{12\cdot 60}{10\cdot 45}=\frac{400}{x}\Rightarrow x=\frac{400\cdot 10\cdot 45}{12\cdot 60}=250\text{ páginas}$$

47. Un trozo de tela de 6 m de largo por 1,5 m de ancho cuesta 45 €.

a) ¿Cuánto valdrá otro de 8 m de largo por 1 m de ancho?

b) Por 12 m de largo de esa tela se han pagado 90 €. ¿Cuánto medía de ancho?

a) La relación de las magnitudes medida del largo y precio es directamente proporcional y la de las magnitudes medida del ancho y precio es directamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

6 m de largo $\Rightarrow$ 1,5 m de ancho $\Rightarrow$ 45 €

1 m de largo $\Rightarrow$ 1,5 m de ancho $\Rightarrow$ 7,5 €

1 m de largo $\Rightarrow$ 1 m de ancho $\Rightarrow$ 5 €

8 m de largo $\Rightarrow$ 1 m de ancho $\Rightarrow$ 40 €

- Método de la regla de tres:

6 m de largo $\Rightarrow$ 1,5 m de ancho $\Rightarrow$ 45 €

8 m de largo $\Rightarrow$ 1 m de ancho $\Rightarrow$ 40 €

$$\frac{6\cdot 1{,}5}{8\cdot 1}=\frac{45}{x}\Rightarrow x=\frac{45\cdot 8\cdot 1}{6\cdot 1{,}5}=40\ €$$

b) La relación de las magnitudes medida del largo y medida del ancho es inversamente proporcional y la de las magnitudes precio y medida del ancho es directamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

6 m de largo $\Rightarrow$ 45 € $\Rightarrow$ 1,5 m de ancho

1 m de largo $\Rightarrow$ 45 € $\Rightarrow$ 9 m de ancho

1 m de largo $\Rightarrow$ 90 € $\Rightarrow$ 18 m de ancho

12 m de largo $\Rightarrow$ 90 € $\Rightarrow$ 1,5 m de ancho

- Método de la regla de tres:

6 m de largo $\Rightarrow$ 45 € $\Rightarrow$ 1,5 m de ancho

12 m de largo $\Rightarrow$ 90 € $\Rightarrow$ x m de ancho

$$\frac{12\cdot 45}{6\cdot 90}=\frac{1{,}5}{x}\Rightarrow x=\frac{1{,}5\cdot 6\cdot 90}{12\cdot 45}=1{,}5\ \text{m}$$

48. Cuatro máquinas producen 120 pedales de bicicleta trabajando 40 horas. Para aumentar un 25 % la producción y disminuir tres cuartas partes las horas de trabajo, ¿cuántas máquinas se deberán añadir a las ya existentes?

Para aumentar la producción un 25 % se deben producir 150 pedales y, para disminuir tres cuartas partes las horas de trabajo, se debe hacer el trabajo en 10 h.

La relación de las magnitudes tiempo y número máquinas es inversamente proporcional y la de las magnitudes número de pedales y número de máquinas es directamente proporcional

- Método de reducción a la unidad:

40 horas $\Rightarrow$ 120 pedales $\Rightarrow$ 4 máquinas

10 horas $\Rightarrow$ 120 pedales $\Rightarrow$ 16 máquinas

10 horas $\Rightarrow$ 10 pedales $\Rightarrow$ $\frac{16}{12}$ máquinas

10 horas $\Rightarrow$ 150 pedales $\Rightarrow$ 20 máquinas

- Método de la regla de tres:

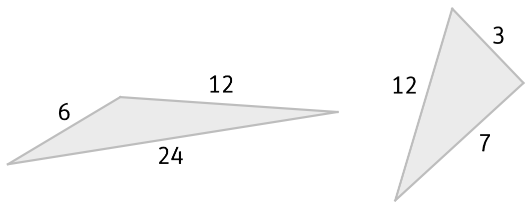
40 horas $\Rightarrow$ 120 pedales $\Rightarrow$ 4 máquinas

10 horas $\Rightarrow$ 150 pedales $\Rightarrow$ x máquinas

$$\frac{10\cdot 120}{40\cdot 150}=\frac{4}{x}\Rightarrow x=\frac{4\cdot 40\cdot 150}{10\cdot 120}=20\ \text{máquinas}$$

Se deben añadir 16 máquinas a las 4 ya existentes.

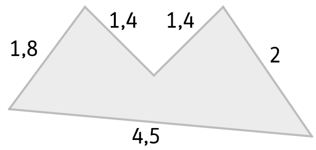
49. Justifica si son o no semejantes las siguientes figuras. En caso afirmativo, indica la razón de semejanza.



Los dos triángulos no son semejantes porque sus tres lados no son proporcionales, porque:

$$\frac{12}{24}=\frac{3}{6}\neq\frac{7}{12}$$

50. ¿Cuánto medirán los lados de un pentágono semejante a este si la razón de semejanza entre los dos es de $\frac{2}{3}$?

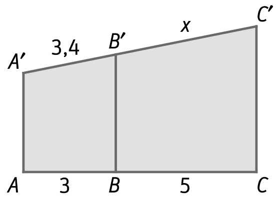


Lado 1,8 $\Rightarrow$ $1,8 \cdot \frac{2}{3} = 1,2$ Lado 1,4 $\Rightarrow$ $1,4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{15}$

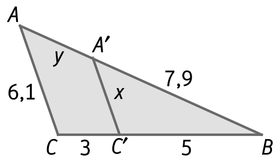
Lado 2 $\Rightarrow$ $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ Lado 4,5 $\Rightarrow$ $4,5 \cdot \frac{2}{3} = 3$

51. Calcula las medidas desconocidas en cada caso.

a)



b)



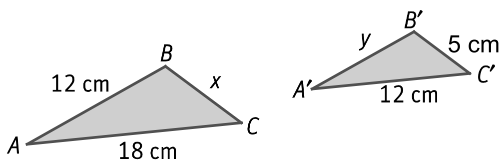
a) Por el teorema de Tales los segmentos son proporcionales.

$$\frac{3,4}{3} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{3,4 \cdot 5}{3} = 5,67$$

b) Los dos triángulos son semejantes por estar en posición de Tales.

$$\frac{5}{8} = \frac{x}{6,1} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 6,1}{8} = 3,8125 \qquad \frac{7,9}{7,9+y} = \frac{5}{8} \Rightarrow y = \frac{8 \cdot 7,9}{5} - 7,9 = 4,74$$

52. Indica la razón de semejanza entre los triángulos *ABC* y *A´B´C´* de la figura y calcula las longitudes de *x* e *y*.



La razón de semejanza es $k = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

$x \cdot \frac{2}{3} = 5 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7,5$ cm $12 \cdot \frac{2}{3} = y \Rightarrow y = 8$ cm

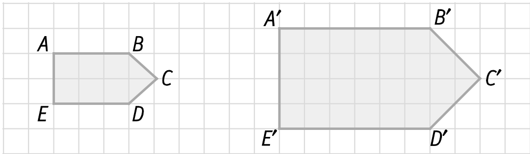
53. Los lados de un cuadrilátero miden 12, 15, 16 y 20 cm. ¿Cuánto miden los lados del cuadrilátero semejante al anterior y con perímetro 21 cm?

El perímetro del cuadrilátero de lados 12, 15, 16 y 20 cm es 63. Por tanto, la razón de semejanza es $k = \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$.

Lado 12 cm $\Rightarrow$ $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ cm Lado 15 cm $\Rightarrow$ $15 \cdot \frac{1}{3} = 5$ cm

Lado 16 cm $\Rightarrow$ $16 \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$ cm Lado 20 cm $\Rightarrow$ $20 \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$ cm

54. Calcula la razón de semejanza y la razón entre las áreas de los polígonos de las figuras.



a) Calcula las áreas de los dos polígonos.

b) Comprueba que su razón de semejanza es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

a) El área de la primera figura es 7 u^2, y el de la segunda, 28 u^2.

b) Los polígonos de las figuras son semejantes porque:

- Sus ángulos correspondientes son iguales.
- Sus lados correspondientes son proporcionales, con razón de proporcionalidad directa k = 2.

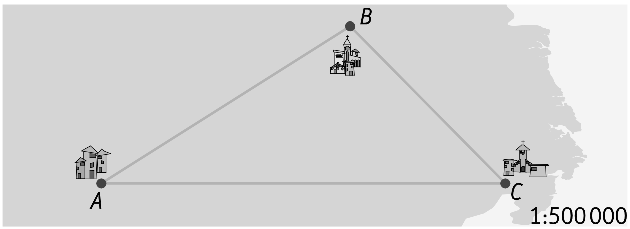
$\overline{AB} = 3$; $\overline{A'B'} = 6 \Rightarrow \overline{A'B'} = 2 \cdot \overline{AB}$ $\quad$ $\overline{DE} = 3$; $\overline{D'E'} = 6 \Rightarrow \overline{D'E'} = 2 \cdot \overline{DE}$

$\overline{BC} = \sqrt{2}$; $\overline{B'C'} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \overline{B'C'} = 2 \cdot \overline{BC}$ $\quad$ $\overline{EA} = 2$; $\overline{E'A'} = 4 \Rightarrow \overline{E'A'} = 2 \cdot \overline{EA}$

$\overline{CD} = \sqrt{2}$; $\overline{C'D'} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \overline{C'D'} = 2 \cdot \overline{CD}$

La razón entre las áreas de las dos figuras es $k^2 = \frac{28}{7} = 4$. La razón de semejanza de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

55. Calcula, midiendo sobre el mapa, las distancias reales entre los pueblos de Arín, Barúa y Cañada.



Las distancias sobre el mapa son $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm y $\overline{CA} = 5{,}5$ cm.

Distancia real de Arín a Barúa es 500 000 · 4 = 2 000 000 cm = 20 km.

Distancia real de Barúa a Cañada es 500 000 · 3 = 1 500 000 cm = 15 km.

Distancia real de Cañada a Arín es 500 000 · 5,5 = 2 750 000 cm = 27,5 km.

56. Actividad resuelta

57. Dos botellas de refresco son semejantes y tienen volúmenes de 0,640 L y 0,270 L.

a) Calcula la razón de semejanza de las dos botellas.

b) Calcula la razón de las áreas de las botellas.

c) Si la altura de la botella menor es de 30 cm, ¿cuál es la altura de la botella mayor?

a) Como la razón de semejanza de los dos volúmenes de las botellas es $k^3 = \frac{0{,}640}{0{,}270} = \frac{64}{27}$, entonces la razón de semejanza de las dos botellas será $k = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$.

b) La razón de semejanza de las áreas de las botellas es $k^2 = \frac{16}{9}$.

c) Si la altura de la botella menor es de 30 cm, entonces la altura de la botella mayor será $30 \cdot \frac{4}{3} = 40$ cm.

58. Dos frascos de perfume son semejantes. Las capacidades respectivas son de 80 cm³ y 270 cm³.

a) Halla el área del mayor si la del menor es de 112 cm².

b) Halla la altura del menor si la del mayor es de 6,6 cm.

Como la razón de semejanza de los dos volúmenes de los perfumes es $k^3 = \frac{270}{80} = \frac{27}{8}$, entonces la razón de semejanza de las dos botellas será $k = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$ y la razón de las dos áreas $k^2 = \frac{9}{4}$.

a) El área del frasco mayor será $112 \cdot \frac{9}{4} = 252 \text{ cm}^2$.

b) La altura del frasco menor será $6{,}6 : \frac{3}{2} = 4{,}4 \text{ cm}$.

59. Di si los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos relaciones.

a) El número de vueltas que da la rueda trasera de una bicicleta en un minuto y la distancia que se recorre en 60 minutos.

b) El número de vueltas que da la rueda delantera de una bicicleta y los kilómetros que se recorren.

c) El número de vueltas que dan las ruedas de una bicicleta en un minuto y el tiempo que se tarda en recorrer 10 km.

d) La longitud de una circunferencia y su radio.

e) El peso y el calzado de una persona.

f) La altura de una persona y la edad que tiene.

g) El número de personas que alquilan un autobús y el dinero que ha de pagar cada una de ellas.

a) Magnitudes directamente proporcionales.

b) Magnitudes directamente proporcionales.

c) Magnitudes inversamente proporcionales.

d) Magnitudes directamente proporcionales.

e) No hay relación de proporcionalidad.

f) No hay relación de proporcionalidad.

g) Magnitudes inversamente proporcionales.

60. Decide si estas tablas de datos pueden referirse a dos magnitudes directamente o inversamente proporcionales o a magnitudes sin relación de proporcionalidad. En el caso de que la haya, indica el valor de la constante de proporcionalidad.

a)

X	**2**	**5**	**10**	**12**
Y	**1,6**	**4**	**8**	**9,6**

b)

X	**3**	**34,5**	**2**	**23**
Y	**46**	**4**	**69**	**6**

c)

X	**1,26**	**2,76**	**3**	**4,05**	**9,1**
Y	**0,42**	**0,92**	**1**	**1,35**	**3**

a) Como los cocientes entre las cantidades correspondientes son siempre iguales, los valores de la tabla son directamente proporcionales: $\frac{1{,}6}{2} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{9{,}6}{12} = 0{,}8$.

La constante de proporcionalidad de *Y* respecto *X* es $k = 0{,}8$.

b) Como los productos entre las cantidades correspondientes son siempre iguales, los valores de la tabla son inversamente proporcionales: $3 \cdot 46 = 34{,}5 \cdot 4 = 2 \cdot 69 = 23 \cdot 6 = 138$.

La constante de proporcionalidad inversa es $k = 138$.

c) Como los cocientes entre las cantidades correspondientes son distintos, los valores de la tabla no son directamente proporcionales. Como los productos entre las cantidades correspondientes son distintos, los valores de la tabla no son inversamente proporcionales. Por tanto, las magnitudes de la tabla no guardan relación de proporcionalidad.

61. Completa estas tablas para que las magnitudes que expresen sean directamente proporcionales. Indica en cada caso las constantes de proporcionalidad de *Y* sobre *X*.

a)

X	2	●●●	8	12
Y	●●●	2	●●●	6

b)

X	2,5	●●●	24	●●●
Y	3	14,4	●●●	54,6

a) La constante de proporcionalidad es $k=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

X	2	4	8	12
Y	1	2	4	6

b) La constante de proporcionalidad es $k=\frac{3}{2,5}=\frac{6}{5}$.

X	2,5	12	24	45,5
Y	3	14,4	28,8	54,6

62. Completa estas tablas para que las magnitudes que expresen sean inversamente proporcionales. Indica en cada caso las constantes de proporcionalidad inversa.

a)

X	2	●●●	●●●	8
Y	●●●	4	13	6,5

b)

X	1	●●●	3	●●●
Y	12	6	●●●	3

a) La constante es $k = 8 \cdot 6,5 = 52$.

X	2	13	4	8
Y	26	4	13	6,5

b) La constante es $k = 1 \cdot 12 = 12$.

X	1	2	3	4
Y	12	6	4	3

63. Reparte las siguientes cantidades en partes directamente proporcionales a los números que se indican.

a) 98 800 proporcionalmente a 5, 8 y 13.

b) 44 650 proporcionalmente a 12, 16, 24 y 42.

c) 1475 proporcionalmente a 2,3; 4 y 5,5.

d) 216 proporcionalmente a $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{10}$.

a) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k=\frac{98\,800}{5+8+13}=3800\Rightarrow\begin{cases}5\Rightarrow 3800\cdot 5=19\,000\\ 8\Rightarrow 3800\cdot 8=30\,400\\ 13\Rightarrow 3800\cdot 13=49\,400\end{cases}$$

b) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k=\frac{44\,650}{12+16+24+42}=475\Rightarrow\begin{cases}12\Rightarrow 475\cdot 12=5700\\ 16\Rightarrow 475\cdot 16=7600\\ 24\Rightarrow 475\cdot 24=11\,400\\ 42\Rightarrow 475\cdot 42=19\,950\end{cases}$$

c) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k=\frac{1475}{2,3+4+5,5}=125\Rightarrow\begin{cases}2,3\Rightarrow 125\cdot 2,3=287,5\\ 4\Rightarrow 125\cdot 4=500\\ 5,5\Rightarrow 125\cdot 5,5=687,5\end{cases}$$

d) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k=\frac{216}{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{7}{10}}=120\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\Rightarrow 120\cdot\frac{1}{2}=60\\ \frac{3}{5}\Rightarrow 120\cdot\frac{3}{5}=72\\ \frac{7}{10}\Rightarrow 120\cdot\frac{7}{10}=84\end{cases}$$

64. Reparte las siguientes cantidades en partes inversamente proporcionales a los números que se indican.

a) 264 proporcionalmente a 1, 2 y 3.

b) 4551 proporcionalmente a 2, 4, 6 y 9.

c) 1475 proporcionalmente a $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ y $\frac{1}{13}$.

d) 216 proporcionalmente a $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$.

a) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k = \frac{264}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 144 \Rightarrow \begin{cases} 1 \Rightarrow 144 \cdot 1 = 144 \\ 2 \Rightarrow 144 \cdot \frac{1}{2} = 72 \\ 3 \Rightarrow 144 \cdot \frac{1}{3} = 48 \end{cases}$$

b) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k = \frac{4551}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = 4428 \Rightarrow \begin{cases} 2 \Rightarrow 4428 \cdot \frac{1}{2} = 2214 \\ 4 \Rightarrow 4428 \cdot \frac{1}{4} = 1107 \\ 6 \Rightarrow 4428 \cdot \frac{1}{6} = 738 \\ 9 \Rightarrow 4428 \cdot \frac{1}{9} = 492 \end{cases}$$

c) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k = \frac{1050}{5+7+13} = 42 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} \Rightarrow 42 \cdot 5 = 210 \\ \frac{1}{7} \Rightarrow 42 \cdot 7 = 294 \\ \frac{1}{13} \Rightarrow 42 \cdot 13 = 546 \end{cases}$$

d) Calculamos la constante de proporcionalidad y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k = \frac{216}{2+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}} = 45{,}47 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \Rightarrow 45{,}47 \cdot 2 = 90{,}94 \\ \frac{2}{3} \Rightarrow 45{,}47 \cdot \frac{3}{2} = 68{,}21 \\ \frac{4}{5} \Rightarrow 45{,}47 \cdot \frac{5}{4} = 56{,}84 \end{cases}$$

65. Completa la siguiente tabla.

Tanto por ciento	**Tanto por uno**	**Tanto por mil**
18 %	●●●	●●●
●●●	**0,21**	●●●

Tanto por ciento	Tanto por uno	Tanto por mil
18 %	0,18	180 ‰
21 %	0,21	210 ‰

66. Calcula los siguientes porcentajes.

a) El 15 % de 7500

b) El 3 % de 200

c) El 25 % de 1600

d) El 75 % de 0,25

a) 15 % de 7500= 0,15 · 7500 = 1125

b) 3 % de 200 = 0,03 · 200 = 6

c) 25 % de 1600 = 0,25 · 1600 = 400

d) 75 % de 0,25 = 0,75 · 0,25 = 0,187 5

67. Halla, en cada caso, el porcentaje que representa la parte del total.

a) 240 de un total de 15 000

b) 5 de un total de 16

c) $\frac{1}{2}$ de un total de 5

d) 0,1 de un total de 100

a) x % de 15 000 = 240 $\Rightarrow \frac{x}{100} \cdot 15\,000 = 240 \Rightarrow x = \frac{240 \cdot 100}{15\,000} = 1{,}6 \Rightarrow 1{,}6$ %

b) x % de 16 = 5 $\Rightarrow \frac{x}{100} \cdot 16 = 5 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 100}{16} = 31{,}25 \Rightarrow 1{,}6$ %

c) x % de 5 = $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{100} \cdot 5 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 100}{5} = 10 \Rightarrow 1{,}6$ %

d) x % de 100 = 0,1 $\Rightarrow \frac{x}{100} \cdot 100 = 0{,}1 \Rightarrow x = \frac{0{,}1 \cdot 100}{100} = 10{,}1 \Rightarrow 1{,}6$ %

68. Aumenta o disminuye en cada caso el porcentaje que se indica.

a) Aumenta 1750 un 3 %.

b) Aumenta 125 000 un 125 %.

c) Disminuye 7500 un 23 %.

d) Disminuye 1 200 500 un 7 %.

a) El índice de variación de un aumento del 3 % es 1,03. $\Rightarrow$ 1750 · 1,03 = 1802,5

b) El índice de variación de un aumento del 125 % es 2,25. $\Rightarrow$ 125 000 · 2,25 = 281 250

c) El índice de variación de una disminución del 23 % es 0,77. $\Rightarrow$ 7500 · 0,77 = 5775

d) El índice de variación de una disminución del 7 % es 0,93. $\Rightarrow$ 1 200 500 · 0,93 = 1 116 465

69. Calcula el resultado final de los siguientes porcentajes encadenados.

a) La cantidad 17 500 aumenta primero un 16 % y el resultado otro 5 %.

b) La cantidad 3050 se aumenta un 10 % y el resultado se disminuye un 10 %.

c) La cantidad 1000 aumenta sucesivamente un 10 %, un 25 % y un 15 %.

d) La cantidad 250 aumenta un 16 %, disminuye en un 5 % y, finalmente, vuelve a aumentar un 8 %.

a) El índice de variación de un aumento del 16 % es 1,16 y, el de un aumento del 5 %, es 1,05. Por tanto, el índice de variación es 1,16 · 1,05 = 1,218 $\Rightarrow$ 17 500 · 1,218 = 21 315.

b) El índice de variación de un aumento del 10 % es 1,10 y, el de una disminución del 10 %, es 0,9. Por tanto, el índice de variación es 1,10 · 0,9 = 0,99 $\Rightarrow$ 3050 · 0,99 = 3019,5.

c) El índice de variación de un aumento del 10 % es 1,10, el de un aumento del 25 %, es 1,25 y, el de un aumento del 15 % es 1,15. Por tanto, el índice de variación es 1,10 · 1,25 · 1,15 = 1,58125 $\Rightarrow$ 1000 · 1,58125 = 1581,25.

d) El índice de variación de un aumento del 16% es 1,16, el de una disminución del 5%, es 0,95 y, el de un aumento del 8 %, es 1,08. Por tanto, el índice de variación es 1,16 · 0,95 · 1,08 = 1,19016 $\Rightarrow$ 250 · 1,19016 = 297,54.

70. Si una cantidad aumenta un 5 % y después vuelve a aumentar un 7 %, ¿en qué porcentaje total varía contando los dos movimientos?

El índice de variación de un aumento del 5% es 1,05 y, el de un aumento del 7%, es 1,07. Por tanto, el índice de variación es 1,05 · 1,07 = 1,1235. Se produce una subida del 12,35 %, contando los dos movimientos.

71. Si una cantidad disminuye un 10 % y después vuelve a disminuir un 12 %, ¿en qué porcentaje total varía contando los dos movimientos?

El índice de variación de una disminución del 10 % es 0,90 y, el de una disminución del 12 %, es 0,88. Por tanto, el índice de variación es 0,90 · 0,88 = 0,792. Se produce una disminución del 20,8 %, contando los dos movimientos.

72. Contesta a las siguientes preguntas.

a) El 25 % de una cantidad es 800. ¿Cuánto vale dicha cantidad?

b) Una cantidad aumenta un 15 % y se convierte en 143,75. ¿Cuánto vale dicha cantidad?

c) ¿Qué cantidad se convierte en 169,2 al disminuirla un 6 %?

a) 25 % de $x = 800 \Rightarrow 0,25 \cdot x = 800 \Rightarrow x = 3200$

b) El índice de variación de un aumento del 15% es 1,15. $\Rightarrow 1,15 \cdot x = 143,75 \Rightarrow x = 125$

c) El índice de variación de una disminución del 6% es 0,94. $\Rightarrow 0,94 \cdot x = 169,2 \Rightarrow x = 180$

73. Actividad resuelta

74. Calcula las cantidades iniciales en cada caso.

a) Una cantidad aumenta primero un 6 % y el resultado aumenta un 10 % y se convierte en 145,75.

b) Una cantidad disminuye primero un 20 % y el resultado vuelve a disminuir un 5 % y se convierte en 912.

c) Una cantidad disminuye primero un 3 % y el resultado aumenta otro 3 % y se convierte en 99,91.

a) El coeficiente correspondiente a un aumento del 6 % es 1,06 y, el coeficiente correspondiente a un aumento del 10 %, es 1,10.

$$1,06 \cdot 1,10 \cdot C_I = 145,75 \Rightarrow C_I = \frac{145,75}{1,06 \cdot 1,10} = 125$$

b) El coeficiente correspondiente a una disminución del 20 % es 0,80 y, el coeficiente correspondiente a una disminución del 5 %, es 0,95.

$$0,80 \cdot 0,95 \cdot C_I = 912 \Rightarrow C_I = \frac{912}{0,80 \cdot 0,95} = 1200$$

c) El coeficiente correspondiente a una disminución del 3 % es 0,97 y, el coeficiente correspondiente a un aumento del 3 %, es 1,03.

$$0,97 \cdot 1,03 \cdot C_I = 99,91 \Rightarrow C_I = \frac{99,91}{0,97 \cdot 1,03} = 100$$

75. El precio de un coche disminuye un 12 % cada seis meses. Si hoy vale 6000 €, ¿cuánto costaba hace un año?

El coeficiente correspondiente a una disminución del 12 % es 0,88.

Como cada seis meses disminuye un 12 %, el coeficiente correspondiente será 0,88 · 0,88.

$$0,88 \cdot 0,88 \cdot C_I = 6000 \Rightarrow C_I = \frac{6000}{0,88 \cdot 0,88} = 7747,93 \text{ €}$$

76. Una cantidad aumenta un 10 %. ¿En qué porcentaje debe disminuir para quedarse como estaba?

El coeficiente correspondiente a un aumento del 10 % es 1,10.

Para que la cantidad se quede como estaba debe cumplirse $1,10 \cdot x = 1$, siendo x el coeficiente de una disminución.

$1,10 \cdot x = 1 \Rightarrow x = 0,909 \Rightarrow$ La cantidad se debe disminuir un 9,09 % para que se quede como estaba.

77. Una cantidad aumenta un 25 %. ¿En qué porcentaje debe volver a aumentar para doblarse?

El coeficiente correspondiente a un aumento del 25 % es 1,25.

Para que la cantidad se doble debe cumplirse $1,25 \cdot x = 2$, siendo x el coeficiente de un aumento.

$1,25 \cdot x = 2 \Rightarrow x = 1,6 \Rightarrow$ La cantidad se tener un segundo aumento del 60 % para doblarse.

78. Calcula el interés que producen 5000 € al 9 % anual de interés simple durante:

a) Un año. **b) Cinco años.** **c) Un año y medio.** **d) Diecisiete meses.**

a) El capital final será 5450 €.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 5000 + \frac{5000 \cdot 9 \cdot 1}{100} = 5000 + 450 = 5450$$

b) El capital final será 7250 €.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 5000 + \frac{5000 \cdot 9 \cdot 5}{100} = 5000 + 2250 = 7250$$

c) El capital final será 5675 €.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 5000 + \frac{5000 \cdot 9 \cdot 1{,}5}{100} = 5000 + 675 = 5675$$

d) El capital final será 5637,5 €.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 5000 + \frac{5000 \cdot 9 \cdot \frac{17}{12}}{100} = 5000 + 637{,}5 = 5637{,}5$$

79. Halla el capital final en que se convierten 2500 € si han estado colocados a un interés simple del 7 % durante 3 años.

$$C_F = C_I + I = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 2500 + \frac{2500 \cdot 7 \cdot 3}{100} = 2500 + 525 = 3025$$

80. Calcula el interés que producen 8000 € al 10 % de interés compuesto durante:

a) Un año. **b) Cinco años.** **c) Doce años.**

a) El capital final será 8800 €.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 8000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^1 = 8800$$

b) El capital final será 12 884,08 €.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 8000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 12\,884{,}08$$

c) El capital final será 25 107,43 €.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 8000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{12} = 25\,107{,}43$$

81. Calcula el tipo de interés simple al que han estado colocados 2000 € si al cabo de tres años se han convertido en 2240 €.

$$C_F = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} \Rightarrow 2240 = 2000 + \frac{2000 \cdot r \cdot 3}{100} \Rightarrow 2240 = 2000 + 60r \Rightarrow 2240 - 2000 = 60r \Rightarrow 240 = 60r \Rightarrow r = 4$$

Se ha aplicado un interés simple del 4 %.

82. Calcula el tipo de interés compuesto al que han estado colocados 3000 € si al cabo de cuatro años se han convertido en 3376,53 €.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow 3376{,}53 = 3000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^4 \Rightarrow \frac{3376{,}53}{3000} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^4 \Rightarrow 1{,}12551 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^4 \Rightarrow 1{,}03 = 1 + \frac{r}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}03 = \frac{r}{100} \Rightarrow r = 3$$

Se ha aplicado un interés compuesto del 3 %.

83. Halla el tiempo que han estados colocados 3500 € a interés simple si se han convertido en 4375 € con un tipo de interés del 5 % anual.

$$C_F = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} \Rightarrow 4375 = 3500 + \frac{3500 \cdot 5 \cdot t}{100} \Rightarrow 4375 = 3500 + 175t \Rightarrow 4375 - 3500 = 175t \Rightarrow 875 = 175t \Rightarrow t = 5$$

El capital se ha colocado durante 5 años.

84. Calcula, por tanteo, el tiempo que han estado colocados 2500 € a interés compuesto si se han convertido en 2812,16 € con un tipo de interés del 4 %.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow 2812{,}16 = 2500 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t \Rightarrow \frac{2812{,}16}{2500} = 1{,}04^t \Rightarrow 1{,}124864 = 1{,}04^t$$

Si $t = 1$, entonces $1{,}04^t = 1{,}04^1 = 1{,}04 \neq 1{,}124864$.

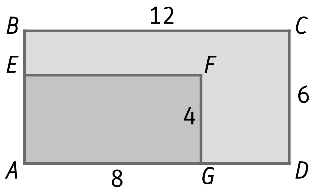
Si $t = 2$, entonces $1{,}04^t = 1{,}04^2 = 1{,}0816 \neq 1{,}124864$.

Si $t = 3$, entonces $1{,}04^t = 1{,}04^3 = 1{,}124864$.

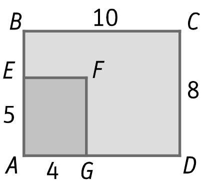
El capital se ha colocado durante 3 años.

85. Comprueba en cada caso que los rectángulos son semejantes e indica la razón de semejanza.

a)



b)



a) Los rectángulos de las figuras son semejantes porque:

- Sus ángulos correspondientes son iguales, al ser todos ángulos rectos.
- Sus lados correspondientes son proporcionales: $\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

La razón de semejanza es $k = 1{,}5$.

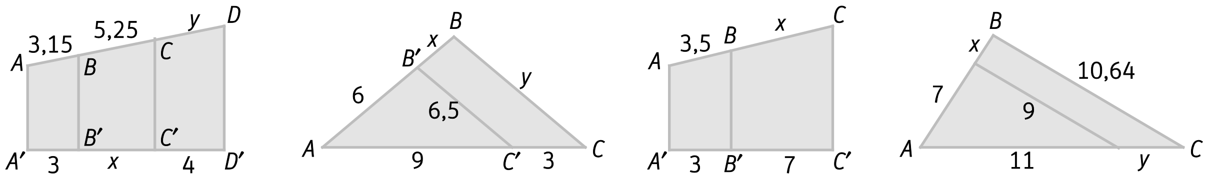
b) Los rectángulos de las figuras son semejantes porque:

- Sus ángulos correspondientes son iguales, al ser todos ángulos rectos.
- Sus lados correspondientes son proporcionales: $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = 2$.

La razón de semejanza es $k = 2$.

86. Calcula los lados desconocidos aplicando el teorema de Tales.

a) **b)** **c)** **d)**



a) Por el teorema de Tales los segmentos son proporcionales:

$$\frac{3{,}15}{3} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = \frac{3{,}15 \cdot 7}{3} = 7{,}35$$

b) Los dos triángulos son semejantes por estar en posición de Tales:

$$\frac{12}{9} = \frac{y}{6{,}5} = \frac{6+x}{6} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 12 - 9 \cdot 6}{9} = 2;\ y = \frac{6{,}5 \cdot 12}{9} = \frac{26}{3}$$

c) Por el teorema de Tales los segmentos son proporcionales:

$$\frac{3{,}15}{3} = \frac{5{,}25}{x} = \frac{y}{4} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 5{,}25}{3{,}15} = 5;\ y = \frac{4 \cdot 3{,}15}{3} = 4{,}2$$

d) Los dos triángulos son semejantes por estar en posición de Tales:

$$\frac{10{,}64}{9} = \frac{11+y}{11} = \frac{7+x}{7} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 10{,}64 - 9 \cdot 7}{9} = 1{,}276;\ y = \frac{11 \cdot 10{,}64 - 9 \cdot 11}{9} = 2$$

87. Los lados de un pentágono miden 2, 4, 5, 5 y 8 cm. Calcula los lados de un pentágono, semejante al anterior, cuyo perímetro mide 12 cm.

El perímetro del pentágono de lados 2, 4, 5, 5 y 8 cm es 24.

Por tanto, la razón de semejanza es $k = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Lado 2 cm $\Rightarrow$ $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ cm

Lados 5 cm $\Rightarrow$ $5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$ cm

Lado 4 cm $\Rightarrow$ $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ cm

Lado 8 cm $\Rightarrow$ $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ cm

88. Los lados de un cuadrilátero miden 5, 5, 6 y 10 cm. El lado mayor de otro cuadrilátero, semejante al anterior, mide 15 cm. Calcula el resto de lados de este nuevo cuadrilátero y comprueba que la razón de los perímetros coincide con la razón de semejanza.

La razón de semejanza de los dos cuadriláteros es $k = \frac{15}{10} = 1{,}5$.

Los lados del nuevo cuadrilátero medirán:

Lados 5 cm $\Rightarrow$ 5 · 1,5 = 7,5 cm

Lado 6 cm $\Rightarrow$ 6 · 1,5 = 9 cm

Lado 10 cm $\Rightarrow$ 10 · 1,5 = 15 cm

El perímetro del cuadrilátero original es 26 cm y, el del nuevo cuadrilátero, 39. La razón de los perímetros es $\frac{39}{26} = 1{,}5$, que coincide con la razón de semejanza.

89. Un rectángulo tiene dimensiones 4 x 25 cm. Otro rectángulo, semejante al anterior, tiene un área de 900 cm^2. Calcula los lados de este nuevo rectángulo.

El área del primer rectángulo es 100 cm^2. Por tanto, la razón de las áreas es $k^2 = \frac{900}{100} = 9$; por tanto, la razón de semejanza es $k = \sqrt{9} = 3$.

Así, las longitudes de los lados del rectángulo semejantes son 4 · 3 = 12 cm y 25 · 3 = 75 cm.

90. Dos ortoedros son semejantes. Las dimensiones del menor son 2 x 3 x 6 cm respectivamente. El volumen del mayor es $\frac{256}{3}$ cm^3. Calcula las dimensiones del ortoedro mayor.

El volumen del primer ortoedro es 36 cm^3.

La razón de los volúmenes es $k^3 = \frac{256}{3} : 36 = \frac{256}{108} = \frac{64}{27}$.

Por tanto, la razón de semejanza es $k = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$.

Así, las longitudes de los lados del ortoedro semejantes son:

$2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67$ cm $\qquad 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ cm $\qquad 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$ cm

Las dimensiones del ortoedro mayor son 2,67 × 4 × 8 cm.

91. Actividad resuelta

92. Realiza los siguientes cambios de unidades.

a) 360 km/h a m/s

b) 90 m/s a km/h

c) 0,90 km/h a m/s

d) 12,5 m/s a km/h

a) 360 km/h = $\frac{360 \cdot 1000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = 100$ m/s

b) 90 m/s = $\frac{\frac{90}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 324$ km/h

c) 0,90 m/s = $\frac{0,9 \cdot 1000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = 0,25$ m/s

d) 12,5 m/s = $\frac{\frac{12,5}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 45$ km/h

93. La velocidad de los barcos se suele medir en nudos. Un nudo es la velocidad que lleva una embarcación que recorre 1852 m en una hora. Realiza los siguientes cambios de unidades:

a) 12 nudos a km/h y a m/s

b) 45 km/h a nudos.

c) 3,6 m/s a nudos.

d) 18,52 km/h a nudos

a) 12 nudos = 12 · 1852 m/h = 22 224 m/h = 22,224 km/h = $\frac{22,224 \cdot 1000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = \frac{2224}{3600}$ m/s $= 6,17$ m/s

b) 45 km/h = 45 000 m/h = 45 000 : 1852 nudos = 24,30 nudos

c) 3,6 m/s = 3,6 · 3600 m/h = 12 960 m/h = 12 960 : 1852 nudos = 7 nudos

d) 18,52 km/h = 18 520 m/h = 18 520 : 1852 nudos = 10 nudos

94. Indica, en cada caso, la respuesta verdadera.

a) Para aumentar una cantidad en un 125 % se multiplica dicha cantidad por:

A. 1,125 B. 2,125 C. 2,5 D. 2,25 E. 1,5

b) Para disminuir una cantidad un 0,5 % se multiplica dicha cantidad por:

A. 0,95 B. 0,925 C. 0,995 D. 0,05 E. 0,005

a) El índice de variación de un aumento del 125 % es 1 + 1,25 = 2,25.

La respuesta correcta es la D.

b) El índice de variación de una disminución del 0,5 % es 1 – 0,005 = 0,995.

La respuesta correcta es la C.

95. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y razona las respuestas.

a) Las velocidades medidas en kilómetros por hora y en metros por segundo son directamente proporcionales.

b) Coloca un capital a interés simple del 10,5% anual durante dos años es lo mismo que colocar dicho capital a un interés compuesto del 10% durante dos años.

c) Todos los rectángulos son polígonos semejantes.

d) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

a) Verdadero

Para pasar de kilómetros por hora a metros por segundo hay que multiplicar por $\frac{1000}{3600}$, que es la constante de proporcionalidad.

b) Verdadero

En los dos casos se obtiene un capital final de 1,21 · C_I:

Interés simple: $C_F = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = C_I + \frac{C_I \cdot 10{,}5 \cdot 2}{100} = C_I + 0{,}21 \cdot C_I = C_I \cdot (1 + 0{,}21) = 1{,}21 \cdot C_I$

Interés compuesto: $C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = C_I \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = 1{,}21 \cdot C_I$

c) Falso

Un rectángulo de dimensiones 3 x 5 cm no es semejante a otro de dimensiones 6 x 15 cm.

d) Verdadero

Un triángulo equilátero de lado L es semejante a otro triángulo equilátero de lado L' porque todos sus ángulos miden 60º y los lados son proporcionales. La razón de semejanza es $k = \frac{L'}{L}$.

96. El precio de los coches disminuye un 15 % cada año.

a) Si un coche vale 6500 €, ¿cuál es su precio al año siguiente?

b) Si pagamos 7650 € por un coche, ¿cuál era su precio el año anterior?

c) Si un coche nuevo cuesta 16 000 €, ¿cuál será su valor después de tres años?

El índice de variación de una disminución del 15 % es 0,85.

a) C_F = 0,85 · 6500 = 5525 €

b) 7650 = 0,85 · $C_I \Rightarrow C_I$ = 9000 €

c) C_F = 16 000 · 0,85 · 0,85 · 0,85 = 9826 €

97. Si cinco pintores tardan 6 días en pintar una casa, ¿cuánto hubieran tardado si se hubiera añadido un pintor más?

Las magnitudes número de pintores y tiempo que tardan en pintar una casa son magnitudes inversamente proporcionales.

Llamando x al tiempo que tardarían 6 pintores:

$5 \cdot 6 = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 6}{6} = 5$

Si hubieran añadido un pintor más, hubieran tardado 5 días.

98. Para asfaltar 4200 m de carretera se precisan 8 trabajadores durante 10 días trabajando 8 h al día. En esos mismos 10 días otro grupo de 12 trabajadores deben asfaltar otro tramo de carretera de 3200 m. ¿Cuántas horas al día trabajarán?

La relación de las magnitudes número de trabajadores y número de horas es inversamente proporcional y la de las magnitudes número de metros y número de horas es directamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

  8 trabajadores $\Rightarrow$ 4200 m $\Rightarrow$ 8 h

  1 trabajador $\Rightarrow$ 4200 m $\Rightarrow$ 64 h

  1 trabajador $\Rightarrow$ 100 m $\Rightarrow$ $\frac{64}{42}$ h

  12 trabajadores $\Rightarrow$ 100 m $\Rightarrow$ $\frac{64}{504}$ h

  12 trabajadores $\Rightarrow$ 3200 m $\Rightarrow$ $\frac{204\ 8}{504} =$ 4,06h

- Método de la regla de tres:

  8 trabajadores $\Rightarrow$ 4200 m $\Rightarrow$ 8 h

  12 trabajadores $\Rightarrow$ 3200 m $\Rightarrow$ x h

  $\frac{12 \cdot 4200}{8 \cdot 3200} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 8 \cdot 3200}{12 \cdot 4200} = 4{,}06$ h

99. Un mapa tiene escala 1:25 000.

a) Calcula la distancia real que separa a dos puntos que en el mapa están separados 15 cm.

b) Calcula la distancia que separa en el mapa a dos puntos que en la realidad están separados 25 km.

a) Distancia real $\Rightarrow$ 25 000 · 15 = 375 000 cm = 3,75 km

b) Distancia en el mapa $\Rightarrow$ 2 500 000 : 25 000= 100 cm = 1 m

100. La población de una localidad ha crecido un 6 % y se convierte en 132 765 habitantes. ¿Cuál era la población antes de la subida?

El índice de variación de una subida del 6 % es 1,06.

$C_F = 1{,}06 \cdot C_I \Rightarrow 132\,765 = 1{,}06 \cdot C_I \Rightarrow C_I = 125\,250$

Antes de la subida la población era de 125 250 habitantes.

101. Si el precio de unos pantalones se rebajan un 25 % primero y un 10 % después y finalmente cuestan 13 € 50 CENT, ¿cuánto costaban antes de las dos rebajas?

El índice de variación de una rebaja del 25 % es 0,75 y, el de una rebaja del 10 %, es 0,90.

$C_F = 0{,}75 \cdot 0{,}90 \cdot C_I \Rightarrow 13{,}50 = 0{,}675 \cdot C_I \Rightarrow C_I = 20$

Antes de las dos rebajas, los pantalones constaban 20 €.

102. Raúl y sus amigos están pensando en hacer un viaje cuando terminen Bachillerato, aunque todavía están en 3º E.S.O.

Raúl tiene ahorrado ya 280 €. Su abuelo para ayudarle le propone elegir entre tres fórmulas. ¿Cuál debería elegir?

a) Una “paga” de 11 € al mes durante los siguientes tres años.

b) Un interés simple anual del 34 % sobre el capital que tiene ahorrado durante los próximos tres años.

c) Un interés compuesto anual del 28 % sobre el capital que tiene ahorrado.

a) 280 + 11 · 12 · 3 = 280 + 396 = 676 €

b) $C_F = C_I + \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = 280 + \frac{280 \cdot 34 \cdot 3}{100} = 280 + 285{,}6 = 565{,}6$ €

c) $C_F = 280 \cdot \left(1 + \frac{28}{100}\right)^3 = 587{,}20$ €

Raúl debería elegir una “paga” de 11 € al mes durante los siguientes tres años, porque conseguiría ahorra más dinero.

103. Una vela de 40 cm de altura se consume a razón de 2,5 cm cada 8 min. Si ya se ha consumido el 25 % de la altura, ¿cuánto tardará en consumirse del todo?

Se ha consumido el 25 % de 40 = 10 cm.

Por tanto, quedan 30 cm de vela.

Las magnitudes centímetros de vela que se consumen y tiempo son magnitudes directamente proporcionales.

Llamando *x* al tiempo que tardaría en consumirse los 30 cm de vela que quedan:

$$\frac{2,5}{30} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 8}{2,5} = 96$$

La vela tardaría en consumirse del todo 96 min = 1 h 36 min.

104. Para llenar una piscina de 225 m^3 de volumen se han precisado cuatro horas y media. Al año siguiente se hicieron obras para aumentar la capacidad en 50 000 L. ¿Cuánto se tardó en llenar la piscina este año?

Las magnitudes volumen de la piscina y tiempo que tarda en llenarse son magnitudes directamente proporcionales.

Sabiendo que 50 000 L = 50 m^3 y llamando *x* al tiempo que se tardó este año en llenarla:

$$\frac{225}{50} = \frac{4,5}{x} \Rightarrow x = \frac{50 \cdot 4,5}{225} = 1$$

Este año se tardó una hora más; es decir, cinco horas y media.

105. Un grifo tarda 6 min en llenar una bañera y otro grifo, 12 min. Un desagüe tarda en vaciar la bañera 5 min. ¿Cuánto se tardará en llenar la bañera si los dos grifos y el desagüe están abiertos?

Si un grifo tarda 6 min en llenar una bañera, entonces en un minuto llena $\frac{1}{6}$ de la bañera.

Si un grifo tarda 12 min en llenar una bañera, entonces en un minuto llena $\frac{1}{12}$ de la bañera.

Si un desagüe tarda 5 minutos en vaciar una bañera, entonces en un minuto vacía $\frac{1}{5}$ de la bañera.

Si los dos grifos y el desagüe están abiertos, entonces se llenará $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ de bañera en un minuto.

Por tanto, la bañera se llenará en 20 min.

106. Para vaciar un depósito de agua de 4000 m^3 de volumen se necesitan 4 desagües iguales abiertos durante 5 h. ¿Cuántas horas serán necesarias para vaciar otro depósito de 6 dam^3 si se utilizan 6 desagües iguales a los anteriores?

La relación de las magnitudes volumen del depósito y número de horas que tarda en vaciarse es directamente proporcional y la de las magnitudes número de desagües y número de horas es inversamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

  4 dam^3 $\Rightarrow$ 4 desagües $\Rightarrow$ 5 h

  1 dam^3 $\Rightarrow$ 4 desagües $\Rightarrow$ 1,25 h

  1 dam^3 $\Rightarrow$ 1 desagüe $\Rightarrow$ 5 h

  6 dam^3 $\Rightarrow$ 1 desagüe $\Rightarrow$ 30 h

  6 dam^3 $\Rightarrow$ 6 desagües $\Rightarrow$ 5 h

- Método de la regla de tres:

  4 dam^3 $\Rightarrow$ 4 desagües $\Rightarrow$ 5 h

  6 dam^3 $\Rightarrow$ 6 desagües $\Rightarrow$ *x* h

  $\frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 4} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 5$ h

107. Un libro está impreso en 250 páginas con 50 líneas por página y con 40 letras por línea. ¿Cuántas letras por línea se deberán colocar para imprimir ese mismo libro en 400 páginas con 25 líneas por página?

La relación de las magnitudes número de páginas y número de letras por línea es inversamente proporcional y la de las magnitudes número de líneas por página y número letras por línea es inversamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

  250 páginas $\Rightarrow$ 50 líneas $\Rightarrow$ 40 letras

  1 página $\Rightarrow$ 50 líneas $\Rightarrow$ 10 000 letras

  1 página $\Rightarrow$ 1 líneas $\Rightarrow$ 500 000 letras

  400 páginas $\Rightarrow$ 1 línea $\Rightarrow$ 1250 letras

  400 páginas $\Rightarrow$ 25 líneas $\Rightarrow$ 50 letras

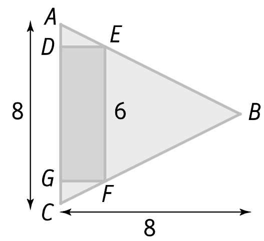
- Método de la regla de tres:

  250 páginas $\Rightarrow$ 50 líneas $\Rightarrow$ 40 letras

  400 páginas $\Rightarrow$ 25 líneas $\Rightarrow$ x letras

  $\frac{400 \cdot 25}{250 \cdot 50} = \frac{40}{x} \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 250 \cdot 50}{400 \cdot 25} = 50$ letras por línea

108. Un rectángulo está inscrito en un triángulo isósceles como muestra la figura.



a) Indica en la figura los vértices de tres triángulos rectángulos semejantes entre sí.

b) Calcula la altura DE del rectángulo.

c) Calcula el perímetro y el área del rectángulo.

a) Llamando H al punto medio del lado AC, se tiene que los triángulos ADE, CGF y CHB son semejantes.

b) Los triángulos CGF y CHB son semejantes.

$$\frac{HB}{GF} = \frac{HC}{GC} = \frac{BC}{FC}$$

Como $\overline{HB} = 8$, $\overline{HC} = 4$ y $\overline{GC} = 1$, entonces $\frac{8}{\overline{GF}} = \frac{4}{1} \Rightarrow \overline{GF} = \frac{8}{4} = 2$

La altura del rectángulo es $\overline{DE} = \overline{GF} = 2$

c) El rectángulo tiene dimensiones 6 x 2.

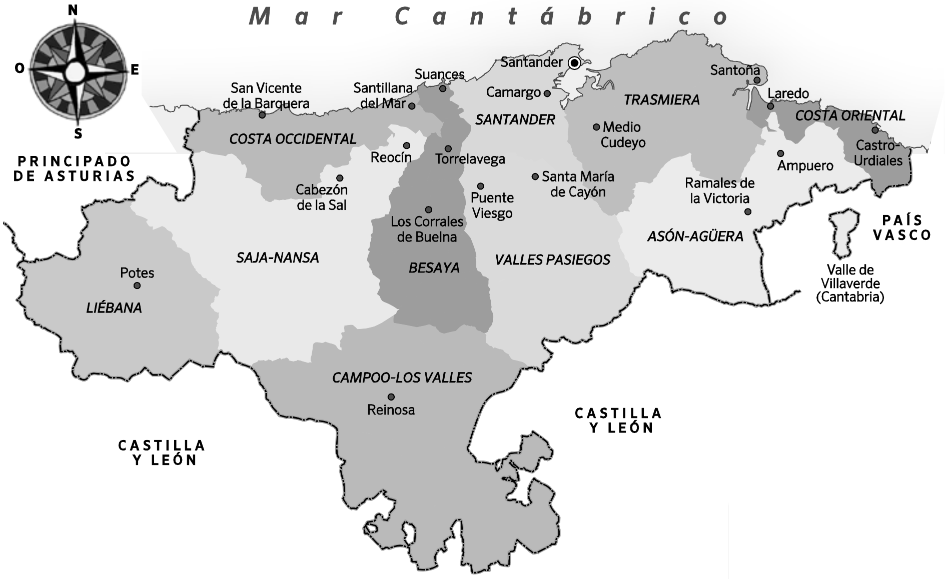
El área del rectángulo es:

$A = 6 \cdot 2 = 12\ u^2$

El perímetro del rectángulo es:

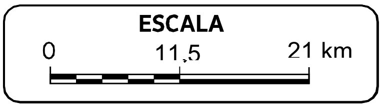
$P = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12 + 4 = 16$ u

109. La distancia de Ramales de la Victoria a Santander es de 37 km en línea recta. Mide la distancia en el mapa y calcula la escala. Dibuja la escala gráfica correspondiente.



La distancia en el mapa es 1,75 cm. Las magnitudes distancia en el mapa y distancia en la realidad son magnitudes directamente proporcionales. Llamando x a la distancia en la realidad:

$\frac{1{,}75}{1} = \frac{37}{x} \Rightarrow x = \frac{1 \cdot 37}{1{,}75} = 21{,}14 \Rightarrow$ La escala es 1:21.



110. Cada una de las dos dimensiones de un rectángulo han aumentado un 20 %. ¿Cuál ha sido el porcentaje de incremento del área?

A. 40 % **B. 144 %** **C. 44 %** **D. 400 %**

Sean x e y las dimensiones del rectángulo. El índice de variación correspondiente a un aumento del 20 % es 1,20.

A = $1{,}20x \cdot 1{,}20y = 1{,}44xy \Rightarrow$ El área ha aumentado un 44 %.

La respuesta correcta es la C.

111. Un litro de una mezcla de pintura contiene un 10 % de pintura negra. ¿Cuántos mililitros de negro hay que añadir para que la disolución resultante contenga un 50 % de pintura negra?

A. 450 **B. 800** **C. 600** **D. 400**

La composición inicial de la mezcla es 100 mililitros de pintura negra y 900 del resto. Añadimos x mililitros de pintura negra, resultando que la mezcla tiene 100 + x mililitros de pintura negra y 1000 + x de pintura en total.

$100 + x = 0{,}5 \cdot (1000 + x) \Rightarrow 100 + x = 500 + 0{,}5x \Rightarrow 0{,}5x = 400 \Rightarrow x = 800$ mililitros

La respuesta correcta es la B.

112. En una semana hice dos veces el mismo viaje. La segunda vez fui un 25% más rápido que la primera. ¿En qué porcentaje disminuyó el tiempo empleado?

A. 25 % **B. 20 %** **C. 40 %** **D. 50 %**

En el viaje de ida la velocidad fue v km/h y tardó t horas y, en el de vuelta, $1{,}25v$ km/h y tardó t' horas.

Entonces $v \cdot t = 1{,}25v \cdot t' \Rightarrow t = 1{,}25t' \Rightarrow t = \frac{5}{4}t' \Rightarrow t' = \frac{4}{5}t = 0{,}8t$. El tiempo disminuyó un 20 %.

La respuesta correcta es la B.

113. Se contratan a 12 obreros para ejecutar una obra y al cabo de 8 días habían hecho sólo la quinta parte. ¿Cuántos obreros hubo que contratar para terminar la obra en 6 días más?

A. 52 **B. 48** **C. 32** **D. 16**

La relación de las magnitudes número de días y número de obreros es inversamente proporcional y la relación de las magnitudes obra a realizar y número de obreros es directamente proporcional.

Método de la regla de tres:

8 días $\Rightarrow \frac{1}{5}$ del trabajo $\Rightarrow$ 12 obreros

6 días $\Rightarrow \frac{4}{5}$ del trabajo $\Rightarrow$ x obreros

$$\frac{6\cdot\frac{1}{5}}{8\cdot\frac{4}{5}} = \frac{12}{x} \Rightarrow \frac{6\cdot 1}{8\cdot 4} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{8\cdot 4\cdot 12}{6} = 64 \text{ obreros}$$

Para terminar la obra se necesitarán 64 obreros; es decir, se tienen que contratar 52 nuevos obreros.

La respuesta correcta es la A.

114. Un ciclista sabe que si alcanza una media de 30 km/h llega a su destino una hora antes de lo que le gustaría llegar, pero si sólo va a 20 km/h, llega una hora más tarde de la hora a la que le gustaría llegar. ¿Qué velocidad media debe conseguir para llegar a la hora justa?

A. 22 km/h **B. 23 km/h** **C. 24 km/h** **D. 25 km/h**

Si llamamos t a la hora justa para llegar a su destino:

$e = 30 \cdot (t - 1)$ y $e = 20 \cdot (t + 1)$.

Como el espacio recorrido a ambas velocidades es el mismo:

$20 \cdot (t + 1) = 30 \cdot (t - 1) \Rightarrow 20t + 20 = 30t - 30 \Rightarrow t = 5$ h $\Rightarrow e = 120$ km

La velocidad media para llegar a la hora justa es:

$$v = \frac{e}{t} = \frac{120}{5} = 24 \text{ km/h}$$

La respuesta correcta es la C.

Encuentra el error

115. El precio de la vivienda baja dos años consecutivos: el primer año baja el 15 %, y el segundo, el 5 %. Calcula el final de una vivienda que inicialmente costaba 175 000 €.

A. Como tiene dos bajadas del 15 % y del 5 %, se puede considerar que tiene una bajada del 20 %.

Por tanto $C_F = 0{,}80\cdot C_I = 0{,}8 \cdot 175\,000 = 140\,000$ €.

El precio final de la vivienda es de 140 000 €.

B. Al sufrir la primera bajada, el precio es de $C_F = 0{,}85 \cdot C_I = 0{,}85 \cdot 175\,000 = 148\,750$ euros.

Al sufrir la segunda bajada, el precio es de $C_F = 0{,}95 \cdot C_I = 0{,}95 \cdot 148\,750 = 141\,312{,}50$ euros.

El precio final de la vivienda es de 141 312,50 euros.

A. Esta respuesta es incorrecta.

Los porcentajes de subida o bajada ni se suman ni se restan.

El índice de variación de una bajada del 15 % es 0,85 y, el de una bajada del 5 %, es 0,95.

Por tanto, el índice de variación total es 0,85 · 0,95 = 0,8075, que corresponde con una bajada del 19,25 %.

Entonces, $C_F = 0{,}8075 \cdot 175\,000 = 141\,312{,}50$ €.

B. Esta respuesta es correcta.

PONTE A PRUEBA

Más salas de cine

Actividad resuelta

El concurso

En un concurso, tres finalistas *A*, *B* y *C* debían contestar a tres listas de 50 preguntas cada una correspondientes a historia, literatura y ciencias. Además, se midió el tiempo que tardaron en acabar el cuestionario. Los resultados de los aciertos y del tiempo de cada uno de los concursantes aparecen en la tabla.

	A	B	C
Historia	40	30	32
Literatura	30	30	35
Ciencias	30	30	43
Tiempo (min)	260	300	255

Se reparte un premio total de 2400 € entre los tres concursantes. Calcula lo que le corresponderá a cada uno si:

1. El reparto se realiza de forma proporcional al total de aciertos obtenido por cada concursante.

- El concursante *A* ha obtenido 40 +30 + 30 = 100 aciertos.
- El concursante *B* ha obtenido 30 +30 + 30 = 90 aciertos.
- El concursante *C* ha obtenido 32 +35 + 43 = 110 aciertos.

Calculamos lo que corresponde a cada uno:

$$k=\frac{2400}{100+90+110}=8\Rightarrow\begin{cases}A\Rightarrow 100\cdot 8=800\\ B\Rightarrow 90\cdot 8=720\\ C\Rightarrow 110\cdot 8=880\end{cases}$$

El concursante *A* recibe 800 €, el *B* 720 € y, el *C*, 880 €.

2. El reparto se realiza de forma proporcional a los números que resultan de calcular la fórmula para cada concursante.

$$\frac{\textbf{Historia}+\textbf{Literatura}+\textbf{2}\cdot\textbf{Ciencias}}{\textbf{Tiempo}}$$

Según la fórmula:

- Concursante *A* $\Rightarrow \dfrac{40+30+2\cdot 30}{260}=0{,}5$ puntos
- Concursante *B* $\Rightarrow \dfrac{30+30+2\cdot 30}{300}=0{,}4$ puntos
- Concursante *C* $\Rightarrow \dfrac{32+35+2\cdot 43}{255}=0{,}6$ puntos

Calculamos lo que corresponde a cada uno:

$$k=\frac{2400}{0{,}5+0{,}4+0{,}6}=1600\Rightarrow\begin{cases}A\Rightarrow 0{,}5\cdot 1600=800\\ B\Rightarrow 0{,}4\cdot 1600=640\\ C\Rightarrow 0{,}6\cdot 1600=960\end{cases}$$

El concursante *A* recibe 800 €, el *B* 640 € y, el *C*, 960 €.

El impuesto de la renta.

Los ciudadanos deben pagar cada año el Impuesto sobre la renta de las Personas Físicas (IRPF). Este impuesto depende de la cantidad total ganada por el ciudadano en su actividad económica anual, que después de ciertas correcciones en función de las características familiares, se transforma en la base imponible. Cuánto más base imponible mayor es el porcentaje que hay que pagar.

La tabla siguiente muestra los porcentajes aplicables a cada tramo de base imponible:

Euros	Porcentaje
De 0 a 12 450	20 %
De 12 450 a 20 200	25 %
De 20 200 a 35 200	31 %
De 35 200 a 60 000	39 %
Más de 60 000	47 %

Por tanto, una persona que haya ganado 25 000 € en todo el año deberá pagar el 20 % de los 12 450 primeros, el 25 % de los 20 200 – 12 450 = 7750 € siguientes y el 31 % de los 25 000 – 20 200 = 4800 € finales.

1. **Calcula la cantidad que debe pagar dicho ciudadano.**

   20 % de 12 450 + 25 % de 7750 + 31 % de 4800 = 5915,5 €

2. **Calcula el porcentaje que ha de pagar una familia que hace la declaración de forma conjunta y tiene una base imponible total de 200 000 €.**

   Una familia que haya ganado 200 000 € en todo el año deberá pagar:

   - El 20 % de los 12 450 primeros
   - El 25 % de los 20 200 – 12 450= 7750 € siguientes
   - El 31 % de los 35 200 – 20 200 = 15 000 €
   - el 39 % de los 60 000 – 35 200 = 24 800
   - El 47 % de 200 000 – 60 000 = 140 000 finales

   20 % de 12 450 + 25 % de 7750 + 31 % de 15 000 + 39 % de 24 800 + 47 % de 140 000 = 84 549,50 €

   El porcentaje que le corresponde es: $\frac{84\,549{,}50}{200\,000} = 0{,}4227 \Rightarrow 42{,}27\ \%$

Presupuestos.

Un ayuntamiento tiene que adquirir adornos callejeros para lucir las calles durante las fiestas. Necesita 600 m de luces de colores y 400 m de banderitas.

Para la adquisición pide presupuestos a tres empresas:

Empresa A:	**Empresa B:**	**Empresa C:**
• **Luces: 4 € por cada metro. A partir de 100 m, se ofrece una rebaja del 20 % en los metros restantes y a partir de los 200 m, una rebaja adicional del 10 %.** • **Banderitas. 1,5 € por cada metro. A partir de 200 m, se cobra a 1,25 € el metro.**	• **Luces: Paquetes de 175 m a 5 € el metro y se regalan 25 m adicionales. Si se solicitan dos o más paquetes, se realiza una rebaja del 40 % a partir del segundo paquete.** • **Banderitas. Paquetes de 50 m a 65 €. Si se solicitan más de 5 paquetes se hace una rebaja general del 5 %.**	• **Luces: 3 € por cada metro. Por cada 50 m adquiridos se regalan 10 m adicionales.** • **Banderitas. 1,75 € por cada metro. A partir de 100 m, se realiza una rebaja del 15 % en los metros restantes.**

1. **Calcula el importe total de cada presupuesto.**

   - Empresa *A*

   Luces: $4 \cdot 100 + 4 \cdot 0{,}8 \cdot 100 + 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 400 = 1872$ €

   Banderitas: $1{,}5 \cdot 200 + 1{,}25 \cdot 200 = 550$ €

   Total presupuesto empresa A: 2422 €

   - Empresa *B*

   Luces: $175 \cdot 5 + 2 \cdot 175 \cdot 5 \cdot 0{,}6 = 1925$ €

   Banderitas: $8 \cdot 65 \cdot 0{,}95 = 494$ €

   Total presupuesto empresa B: 2419 €

   - Empresa *C*

   Luces: $3 \cdot 10 \cdot 50 = 1500$ €

   Banderitas: $1{,}75 \cdot 100 + 1{,}75 \cdot 300 \cdot 0{,}85 = 621{,}25$ €

   Total presupuesto empresa *C*: 2121,25 €

   El presupuesto más económico es el de la empresa *C*.

2. **Suponiendo que el Ayuntamiento puede adquirir por separado los dos tipos de adorno, ¿cómo realizará el encargo?**

   El encargo de las luces lo haría a la empresa *C* y, el de las banderitas, a la empresa *B.*

3. **Aparece una nueva empresa que le propone rebajar el mejor presupuesto total de los tres en un 5 % pero se debe añadir una cantidad fija de 150 € en concepto de gastos de suministro. ¿Qué hará el Ayuntamiento?**

   El presupuesto más económico es el de la empresa *C*: 2121,25 €.

   La nueva empresa cobraría al Ayuntamiento $150 + 0{,}95 \cdot 2121{,}25 = 2165{,}19$ €.

   El Ayuntamiento seguiría haciendo el encargo a la empresa *C*.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica si los siguientes pares de magnitudes son directa o inversamente proporcionales.

a) Número de peldaños que se ha subido en una escalera y altura a la que se ha llegado.

b) Consumo diario de agua de los habitantes de una localidad y números de días para abastecer de agua a dicha localidad con el agua embalsada en un pantano.

a) Magnitudes directamente proporcionales. **b)** Magnitudes inversamente proporcionales.

2. Calcula el valor de *a* y *b* para que las magnitudes *X* e *Y* de las siguientes tablas sean directamente proporcionales, en el primer caso, e inversamente proporcionales, en el segundo.

a)

X	***a***	**12**	**15**
Y	**1,6**	**2,4**	***b***

b)

X	**4**	***a***	**12**
Y	***b***	**6**	**5**

Indica el valor de las constantes de proporcionalidad.

a) Como las magnitudes son directamente proporcionales, los cocientes correspondientes son iguales.

$$\frac{a}{1{,}6}=\frac{12}{2{,}4}=\frac{15}{b}\Rightarrow a=\frac{12\cdot 1{,}6}{2{,}4}=8 \text{ y } b=\frac{15\cdot 2{,}4}{12}=3$$

La constante de proporcionalidad es $k=\frac{8}{1{,}6}=\frac{12}{2{,}4}=\frac{15}{3}=5$.

b) Como las magnitudes son inversamente proporcionales, los productos correspondientes son iguales.

$$4\cdot b=a\cdot 6=12\cdot 5\Rightarrow b=\frac{12\cdot 5}{4}=15 \text{ y } a=\frac{12\cdot 5}{6}=10$$

La constante de proporcionalidad inversa es $k = 4 \cdot 15 = 10 \cdot 6 = 12 \cdot 5 = 60$.

3. Se colocan 2500 € a un interés del 5 % anual durante 4 años. Calcula el capital final que se obtiene si:

a) El interés es simple. **b) El interés es compuesto.**

a) El capital final será 3000 €.

$$C_F=C_I+I=C_I+\frac{C_I\cdot r\cdot t}{100}=2500+\frac{2500\cdot 5\cdot 4}{100}=3000$$

b) El capital final será 3038,77 €.

$$C_F=C_I\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t=2500\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)^4=3038{,}77$$

4. La batería de un ordenador se gasta en un 5 % del total de su capacidad por cada 15 min de trabajo. ¿Cuánto tiempo se podrá utilizar el ordenador si la batería está consumida en una cuarta parte?

Las magnitudes batería que queda y tiempo que se puede utilizar el ordenador son directamente proporcionales. Sabiendo que queda un 75 % de la batería y, llamando x al tiempo que se podrá usar el ordenador:

$$\frac{5}{75}=\frac{15}{x}\Rightarrow x=\frac{75\cdot 15}{5}=225$$

Se podrá utilizar la batería durante 225 minutos; es decir, 3 horas y 45 minutos.

5. Una cantidad sufre dos subidas consecutivas del 5 % y 8 % respectivamente y se convierte en 5103. ¿Cuánto valía dicha cantidad antes de la subida?

El coeficiente correspondiente a un aumento del 5 % es 1,05 y, el coeficiente de un aumento del 8 %, es 1,08.

$$1{,}05\cdot 1{,}08\cdot C_I=5103\Rightarrow C_I=\frac{5103}{1{,}05\cdot 1{,}08}=4500$$

6. Completa la siguiente tabla:

Porcentaje	Tanto por uno	Tanto por mil
12,5 %	●●●	●●●
●●●	●●●	**289 ‰**
●●●	**0,375**	●●●

Porcentaje	Tanto por uno	Tanto por mil
12,5 %	0,125	125 ‰
28,9 %	0,289	289 ‰
37,5 %	0,375	375 ‰

7. Durante el mes de abril en un hotel permanecieron 50 bombillas encendidas durante 6 h al día y produjeron un gasto de 20 €. En el mes de junio permanecieron encendidas 60 bombillas pero solo 4 h al día. ¿Cuánto se gastó en este segundo mes por este concepto?

La relación de las magnitudes número de bombillas y gasto es directamente proporcional y la de las magnitudes número horas y gasto es directamente proporcional.

- Método de reducción a la unidad:

50 bombillas $\Rightarrow$ 6 h $\Rightarrow$ 20 €

10 bombillas $\Rightarrow$ 6 h $\Rightarrow$ 4 €

10 bombillas $\Rightarrow$ 1 h $\Rightarrow$ $\frac{4}{6}$ €

60 bombillas $\Rightarrow$ 1 h $\Rightarrow$ 4 €

60 bombillas $\Rightarrow$ 4 h $\Rightarrow$ 16 €

- Método de la regla de tres:

50 bombillas $\Rightarrow$ 6 h $\Rightarrow$ 20 €

60 bombillas $\Rightarrow$ 4 h $\Rightarrow$ x €

$$\frac{50\cdot 6}{60\cdot 4}=\frac{20}{x}\Rightarrow x=\frac{60\cdot 4\cdot 20}{50\cdot 6}=16\text{ €}$$

8. Reparte la cantidad 1443:

a) De forma directamente proporcional a 3, 15 y 21.

b) De forma inversamente proporcional a $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{21}$ y $\frac{1}{3}$.

a) Calculamos la constante de proporcionalidad directa y la cantidad que corresponde a cada número.

$$k=\frac{1443}{3+15+21}=37\Rightarrow\begin{cases}3\Rightarrow 37\cdot 3=111\\15\Rightarrow 37\cdot 15=555\\21\Rightarrow 37\cdot 21=777\end{cases}$$

b) Calculamos la constante de proporcionalidad inversa y la cantidad que corresponde a cada número.

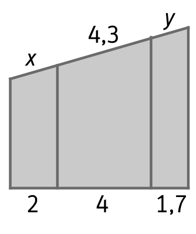
$$k=\frac{1443}{13+21+3}=39\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{13}\Rightarrow 39\cdot 13=507\\\frac{1}{21}\Rightarrow 39\cdot 21=819\\\frac{1}{3}\Rightarrow 39\cdot 3=117\end{cases}$$

9. Las dimensiones de un rectángulo son 4 x 10 cm. Halla la medidas de otro rectángulo semejante al anterior y que tenga por área 360 cm^2.

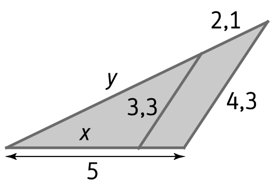
El área del primer rectángulo es 40 cm^2. Por tanto, la razón de las áreas es $k^2=\frac{360}{40}=9$; así, la razón de semejanza es k = 3. Luego, las longitudes de los lados del rectángulo semejante son 4 · 3 = 12 cm y 10 · 3 = 30 cm.

10. Calcula *x* e *y* en cada una de las siguientes figuras:

a)



b)



a) Por el teorema de Tales los segmentos son proporcionales:

$$\frac{x}{2}=\frac{4,3}{4}=\frac{y}{1,7}\Rightarrow x=\frac{4,3\cdot 2}{4}=2,15;\ y=\frac{4,3\cdot 1,7}{4}=1,8275$$

b) Los dos triángulos son semejantes por estar en posición de Tales:

$$\frac{4,3}{3,3}=\frac{5}{x}=\frac{y+2,1}{y}\Rightarrow y=\frac{3,3\cdot 2,1}{4,3-3,3}=6,93;\ x=\frac{3,3\cdot 5}{4,3}=3,84$$