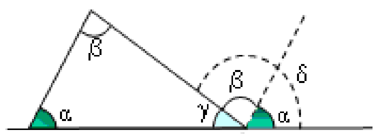
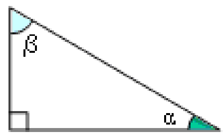
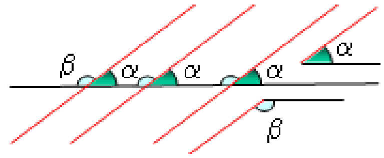
Tema 9. Figuras planas Resumen

Algunos resultados básicos:

- La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos: 180º → $\alpha + \beta + \gamma = 180º$
- Todo ángulo "externo" de un triángulo es igual a la suma de los otros dos ángulos no adyacentes: $\delta = \alpha + \beta$.



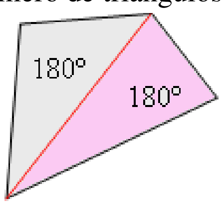




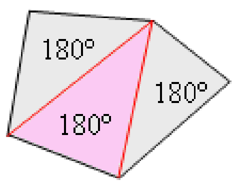
- Dos ángulos son complementarios cuando suman 90º. (Si suman 180º se llaman suplementarios.)
- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
- Si una recta corta a otras rectas paralelas, los ángulos que determina con todas ellas son iguales. Esto implica que los ángulos de lados paralelos son iguales o suplementarios.

Suma de los ángulos de un polígono.

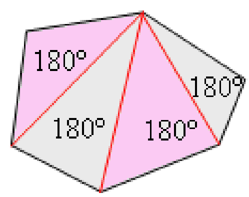
El triángulo es la figura *comodín* de los polígonos, pues cualquier polígono puede descomponerse en triángulos. Por tanto, la suma de los ángulos de un polígono es igual a 180º por el número de triángulos que pueden formarse en él.



cuadrilátero



pentágono

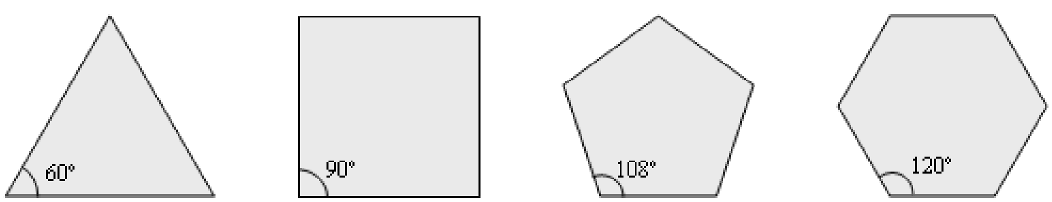


hexágono

- La suma de los ángulos de un cuadrilátero será 180º · 2 = 360º.
- La suma de los ángulos de un pentágono será 180º · 3 = 540ºº.
- La suma de los ángulos de un hexágono será 180º · 4 = 720º.
- En general, la suma de los ángulos de un polígono de n lados es: $S = (n - 2) \cdot 180º$

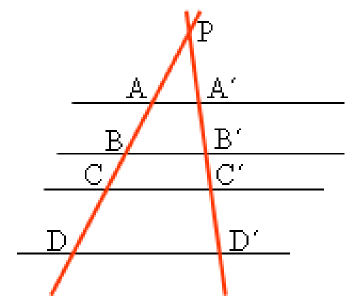
Caso de polígonos regulares.

Los polígonos regulares tienen todos sus lados y todos sus ángulos iguales.
El triángulo equilátero tiene sus 3 ángulos iguales. Cada uno de ellos vale 180º : 3 = 60º.
El cuadrado tiene sus 4 ángulos iguales. Cada uno de ellos vale 360º : 4 = 90º.
El pentágono regular tienes sus 5 ángulos iguales. Cada uno de ellos vale 540º : 5 = 108º.
El hexágono regular tienes sus 6 ángulos iguales. Cada uno de ellos vale 720º : 6 = 120º.



Teorema de Tales

El teorema de Tales relaciona las longitudes de los segmentos obtenidos al cortar dos rectas cualesquiera mediante un conjunto de rectas paralelas. Se puede formular como sigue:

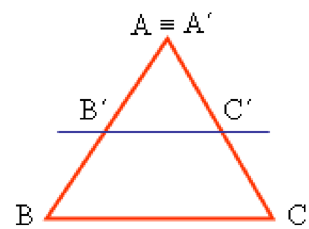


"Si se tiene un conjunto de rectas paralelas y son cortadas por otras dos rectas, entonces, las medidas de los segmentos determinados en una de las rectas secantes son proporcionales a las medidas de los segmentos determinados en la otra."

Por tanto: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'}$

También puede verse que los triángulos PAA´, PBB´, PCC´… son semejantes: tienen dos lados superpuestos y el tercero, paralelo. Luego, también se cumple:

$$\frac{PA}{AA'} = \frac{PB}{BB'} = \frac{PC}{CC'}$$

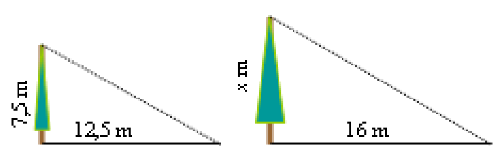


- De otra manera. Toda paralela a un lado de un triángulo, ABC, determina otro triángulo pequeño, A´B´C´, semejante al grande (los vértices A y A´ coinciden).

En este caso, se dice que los triángulos semejantes, ABC y A´B´C´ están en posición de Tales.

Ejemplos:

a) Un árbol que mide 7,5 m proyecta una sombra de 12,5 m. ¿Cuánto medirá otro árbol si la sombra que proyecta es de 16 m?



Por el teorema de Tales:

$$\frac{7,5}{12,5} = \frac{x}{16} \Rightarrow 7,5 \cdot 16 = 12,5x \Rightarrow 120 = 12,5x \Rightarrow x = \frac{120}{12,5} = 9,6 \text{ m}$$

b) En los planos a escala se aplica la proporcionalidad geométrica. Así, si en un mapa a escala 1 : 1000000 la distancia entre dos ciudades es 32 cm. La distancia real será 32 · 1000000 = 32000000 cm = 320 km.

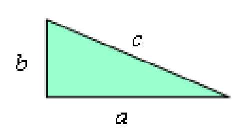
Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece la relación entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos. Esa relación es:

"En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es iguala a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".

O lo que es lo mismo:

Si los catetos miden *a* y *b* y la hipotenusa *c*, entonces: $c^2 = a^2 + b^2$



Ejemplos:

a) El triángulo de lados 5, 12 y 13 cm sí es rectángulo, pues $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Como $13^2 = 169$, se cumple que $5^2 + 12^2 = 13^2$, y, por tanto, el triángulo es rectángulo.

b) El triángulo de lados 3, 4 y 6 cm no es rectángulo, pues no cumple el teorema de Pitágoras. En efecto, la suma de los cuadrados de los presuntos catetos, vale 25: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$; mientras que el cuadrado de la presunta hipotenusa, vale 36: $6^2 = 36$. Los resultados no son iguales.

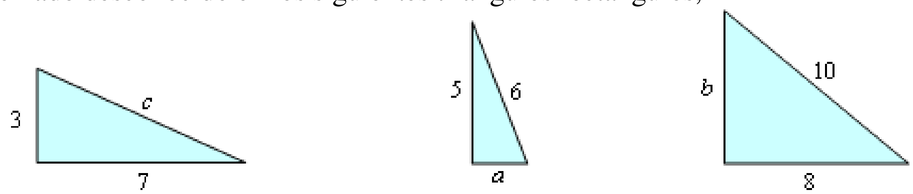
- El teorema de Pitágoras, la relación $c^2 = a^2 + b^2$, permite conocer el valor de cualquier lado de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos, pues:

$$c^2 = a^2 + b^2 \iff a^2 = c^2 - b^2 \iff b^2 = c^2 - a^2$$

O lo que es lo mismo:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \iff a = \sqrt{c^2 - b^2} \iff b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Ejemplo:
El valor del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos,



se calcula como sigue:

$$c = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}83 \qquad a = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{36-25} = \sqrt{11} \approx 3{,}32$$

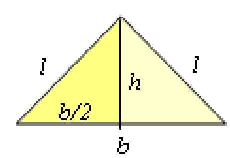
$$b = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$$

<u>Aplicaciones del teorema de Pitágoras</u>

El teorema de Pitágoras puede aplicarse siempre que aparezcan triángulos rectángulos. Como la clave del triángulo rectángulo es la existencia de un ángulo de 90º, siempre que surja un ángulo recto hay que buscar la posibilidad de aplicar Pitágoras. Pero esto es frecuente en muchos problemas de geometría. Por ejemplo:

- La altura de un triángulo es perpendicular al lado de la base (forma un ángulo recto).
- La altura de un triángulo divide al triángulo inicial en dos triángulos rectos.
- La altura de un triángulo isósceles con base el lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos iguales.
- Los cuadrados y los rectángulos pueden partirse, mediante una diagonal, en dos triángulos rectángulos.
- Todo polígono regular puede descomponerse en triángulos isósceles, y estos en triángulos rectángulos.
- Toda cuerda de una circunferencia forma con el centro de esa circunferencia un triángulo isósceles; luego, con vértice en el centro, pueden formarse triángulos rectángulos.

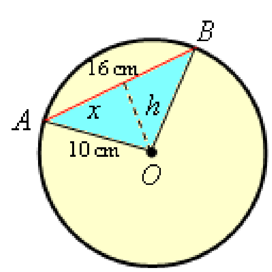
Ejemplos:
a) Si en el triángulo adjunto el lado l = 5 cm y la base b = 6 cm, se cumple:



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow 25 - 16 = h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3.$$

b) Si la cuerda AB mide 16 cm y se ha trazado en una circunferencia de radio 10 cm, entonces podría hallarse la superficie del triángulo ABO, pues:

1. La altura del triángulo cae en el punto medio de la cuerda, luego $x = 8$ cm



2. Por Pitágoras, $10^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow 10^2 = h^2 + 8^2 \Rightarrow h^2 = 100 - 64$.
De donde, $h = 6$.

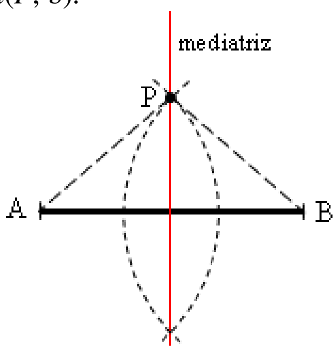
Por tanto, el área del triángulo ABO será: $S = \dfrac{16 \cdot 6}{2} = 48$ cm^2.

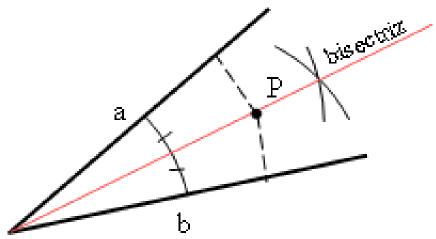
<u>Lugares geométricos</u>

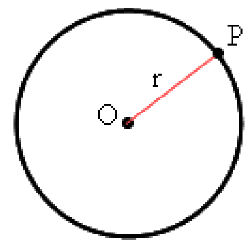
Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumple una determinada propiedad geométrica. Esta propiedad suele darse en términos de distancias.

Algunos lugares geométricos clásicos son:

- La <u>mediatriz de un segmento</u>, que es la perpendicular al segmento por su punto medio, puede definirse como el “lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento”. Si los extremos del segmento son A y B, un punto P es de la mediatriz sí y sólo sí $d(P, A) = d(P, B)$.
- La <u>bisectriz de un ángulo</u> es el “lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo”. Si los lados del ángulo son a y b, el punto P es de la bisectriz si $d(P, \text{a}) = d(P, \text{b})$.



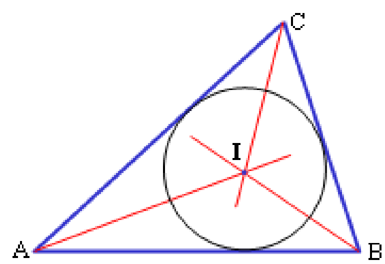


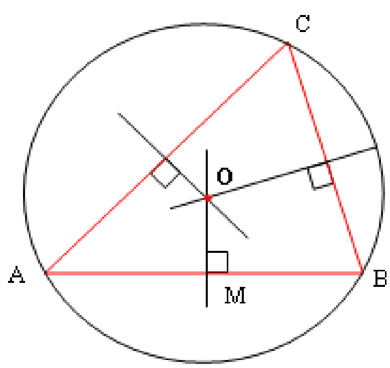


- La <u>circunferencia</u> es el “lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto interior llamado centro”. Si P es de la circunferencia entonces: $d(P, O) = r$.

- Las <u>bisectrices</u> de un triángulo son las bisectrices de cada uno de sus ángulos.

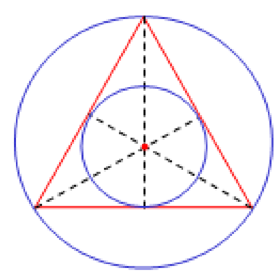
El punto donde se cortan las bisectrices se llama <u>incentro</u>. El incentro equidista de los lados del triángulo: es el centro de la circunferencia tangente a los tres lados, llamada <u>circunferencia inscrita</u>.





- Las <u>mediatrices</u> de un triángulo son las tres mediatrices de los lados.

El punto donde se cortan las mediatrices se llama <u>circuncentro</u>; dicho, y equidista de los vértices del triángulo. El circuncentro es el centro de la <u>circunferencia circunscrita</u> al triángulo.



- En los <u>triángulos equiláteros</u> coinciden el incentro y el cincuncentro.

- En los <u>triángulos rectángulos</u> el circuncentro está en el punto medio de la hipotenusa.