Tema 7. Proporcionalidad — Resumen

La razón de dos números a y b es la fracción $\frac{a}{b}$. (Es su cociente, en el orden que dice.)

Una proporción es la igualdad de dos razones. Esto es, una igualdad de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Esa igualdad indica que las cantidades a y c son directamente proporcionales a las cantidades b y d, respectivamente. Puede leerse así: "a es a b como c es a d".

- Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número. Por tanto, la razón entre las magnitudes correspondientes es la misma.

Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son directamente proporcionales. Por tanto, todas las razones que se forman son iguales; esto es:

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{21} = \frac{20}{30} = \frac{30}{y} = \frac{x}{60} = \frac{1}{k}$$

Tabla 1. Directamente proporcionales

Magnitud A	**2**	14	20	**30**	x	**1**
Magnitud B	**3**	21	30	y	**60**	k

Reducción a la unidad en la proporcionalidad directa: constante de proporcionalidad

En los problemas de proporcionalidad resulta útil saber cuánto vale B cuando A = 1. Ese valor se halla dividiendo el valor de B por su correspondiente en A.

Ejemplo:

En la Tabla 1 el valor de B cuando A = 1 es 3 : 2 = 1,5. Ese es el valor de k en la tabla.

- El valor de k, para dos magnitudes proporcionales, es siempre el mismo, y se llama constante de proporcionalidad.
- Conociendo el valor de k, los valores de B se hallan multiplicando los de A por k.
- Conociendo el valor de k, los valores de A se hallan dividiendo los de B por k.

Ejemplo:

a) Para la Tabla 1, si A vale 30 $\Rightarrow$ B valdrá 30 · 1,5 = 45. Por tanto, $y = 45$

b) En la misma Tabla 1, si B vale 60 $\Rightarrow$ A valdrá 60 : 1,5 = 40. Por tanto, $x = 40$.

Repartos directamente proporcionales

Repartir una cantidad T entre tres números a, b y c, de manera directamente proporcional, consiste en asignar a cada número la parte de T que sea directamente proporcional a su valor. Esto es, si las cantidades correspondientes fuesen A, B y C, debe cumplirse que

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k \Leftrightarrow A = k \cdot a,\ B = k \cdot b;\ C = k \cdot c.$$

El valor de k, que es el correspondiente a 1, se obtiene dividiendo T entre $(a + b + c)$.

Ejemplo:

Si se desea repartir 15000 € directamente proporcional a los números 2, 3 y 5, se tiene que $k = \frac{15000}{2+3+5} = \frac{15000}{10} = 1500$. Por tanto, a 2 le corresponderán 3000 €; a 3, 4500 €; y a 5, 7500 €.

Nota: El reparto anterior puede dar respuesta al siguiente problema: "Tres amigos apuestan 2, 3 y 5 euros, respectivamente, en una lotería. Si les toca un premio de 15000 €, ¿cómo deberían repartirse el premio?

- <u>Dos magnitudes son inversamente proporcionales</u> cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número; o cuando al dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada por el mismo número.

Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son inversamente proporcionales
Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 4, …, la magnitud B (de valor inicial 50) se divide por 2, por 4, …

Tabla 2. Inversamente proporcionales						
Magnitud A	**2**	4	8	**20**	***x***	**1**
Magnitud B	**50**	25	12,5	***y***	**2,5**	***k***

<u>Propiedad</u>: si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de las cantidades correspondientes es constante.
Para las magnitudes A y B de la tabla anterior: $2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = ... = x \cdot 2{,}5$.

- Es el valor de k en la Tabla 2, que puede obtenerse de la igualdad $2 \cdot 50 = 1 \cdot k \Rightarrow k = 100$., es la constante de proporcionalidad inversa. (Es el valor de B correspondiente al valor de A = 1.)
- Conociendo la constante k, los valores de B se hallan dividiendo k entre los valores de A.
- Conociendo la constante k, los valores de A se hallan dividiendo k entre los valores de B.

Ejemplo:
a) Para la Tabla 2, si A vale 20 ⇒ B valdrá 100 : 20 = 5. Por tanto, $y = 20$.
b) En la misma Tabla 2, si B vale 2,5 ⇒ A valdrá 100 : 2,5 = 40. Por tanto, $x = 40$.

<u>Repartos inversamente proporcionales</u>
Repartir una cantidad T entre tres números a, b y c, de manera inversamente proporcional, consiste en asignar a cada número la parte de T que sea inversamente proporcional a su valor. Esto es, si las cantidades correspondientes fuesen A, B y C, debe cumplirse que

$$A \cdot a = B \cdot b = C \cdot c = k \Leftrightarrow A = \frac{k}{a},\ B = \frac{k}{b};\ C = \frac{k}{c}.$$

Por tanto, las cantidades A, B y C son directamente proporcionales a $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$, respectivamente. El valor de k se obtiene dividiendo T entre $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Ejemplo:
Si se desea repartir 15000 € inversamente proporcional a los números 2, 3 y 5, se tiene que

$$k = \frac{15000}{1/2+1/3+1/5} = \frac{15000}{31/30} = \frac{15000 \cdot 30}{31} \approx 14516{,}13.$$

Por tanto, a 2 le corresponderán $\frac{14516{,}13}{2} \approx 7258{,}06$; a 3, $\frac{14516{,}13}{3} \approx 4838{,}71$ €; y a 5, $\frac{14516{,}13}{5} \approx 2903{,}25$ €.

Porcentajes. Los problemas de porcentajes son problemas de proporcionalidad directa.

Ejemplo: El 16% de 1200 se calcula resolviendo la proporción: $\frac{16}{100}=\frac{x}{1200}\Rightarrow x=192$.

La constante de proporcionalidad es $k=\frac{16}{100}=0{,}16$. El 16% de 1200 será 1200 · 0,16 = 192.

- Cuando a una cantidad inicial se le añade un tanto por ciento de la misma cantidad, se habla de aumentos porcentuales. (Es lo propio de las subidas de precios.)

Ejemplo: Si el precio de los libros de texto ha aumentado, del año pasado a este, el 12 %, ¿cuánto valdrá este año un libro que costó 32,50 € el pasado?
La cantidad que aumenta es el 12% de 32,50 = 0,12 · 32,50 = 3,90 €.
El precio que debe pagarse es lo que valía + el aumento; esto es: 32,50 € + 3,90 € = 36,40 €.
Como 32,50 € + 3,90 € = 32,50 + 0,12 · 32,59 = (1 + 0,12) · 32,50 = 1,12 · 32,50 = 36,40 €, el precio de este año puede obtenerse multiplicando el del año anterior por 1,12.

- Para aumentar un porcentaje a una cantidad se multiplica esa cantidad por $1+\frac{porcentaje}{100}$.

- Cuando a una cantidad inicial se le quita un tanto por ciento de la misma cantidad, se habla de disminuciones porcentuales. (Es lo propio de las rebajas de precios.)

Ejemplo: Si el precio de un teléfono móvil se ha rebajado un 20% ¿cuánto costará si antes de las rebajas costaba 45 €?
La cantidad rebajada es el 20 % de 45 = 0,20 · 45 = 9 €.
El precio que debe pagarse es lo que valía menos la rebaja. Esto es: 45 − 9 = 36 €.

- Para disminuir un porcentaje a una cantidad se multiplica esa cantidad por $1-\frac{porcentaje}{100}$.

Ejemplo: Si el precio de un teléfono móvil se ha rebajado un 20 % ¿cuánto costará si antes de las rebajas costaba 45 €?
La cantidad a pagar será: $45\cdot(1-0{,}20)=45\cdot 0{,}80=36$ €.

Interés simple

El interés simple es la ganancia, el beneficio, que proporciona una cantidad de dinero, depositada en un banco a un tanto por ciento fijo, durante un periodo de tiempo.

- La cantidad depositada en el banco suele llamarse capital: *C*.
- El tanto por ciento, la tasa de interés, suele expresarse en tanto por uno: *r*.
- El tiempo suele expresarse en años: *t*.

El interés es directamente proporcional al capital, a la tasa de interés y al tiempo. Vienen determinados por la expresión: $I=C\cdot r\cdot t$.

Ejemplo: Si el capital es de 12000 € y la tasa de interés del 5%, con lo que $r=\frac{5}{100}=0{,}05$:

a) los beneficios al cabo de un año serán $I=12000\cdot 0{,}05\cdot 1=600$ €.

b) los beneficios al cabo de 4 años serán $I=12000\cdot 0{,}05\cdot 4=2400$ €.