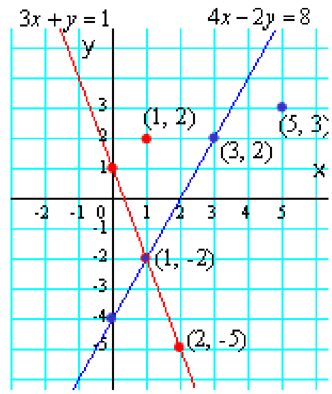
Tema 6. Sistemas de ecuaciones lineales Resumen

Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Son expresiones de la forma $ax + by = c$. Las incógnitas son x e y, mientras que a, b y c son números.

- La solución de estas ecuaciones son pares de valores (uno para x y otro para y) que cumplen la ecuación.

Ejemplos: a) $4x - 2y = 8$. El par $x = 3$ e $y = 2$ es solución, pues $4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 8$. También es solución el par $x = 1$ e $y = -2$. El par $x = 5$ e $y = 3$ no es solución de esa ecuación, pues $4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 14 \neq 8$.

b) La ecuación $3x + y = 1$ tiene por soluciones $x = 2$ e $y = -5$; $x = 1$ e $y = -2$, e infinitos pares más. El par $x = 1$ e $y = 2$ no es solución de ella.



- Una ecuación con dos incógnitas tiene infinitos pares de soluciones. Esos pares se corresponden con los puntos de una recta.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Su forma más simple es $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

- La solución de un sistema es el par de valores de x e y que cumple las dos ecuaciones a la vez.

Ejemplo: Las dos ecuaciones del ejemplo anterior determinan el sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$. Su solución es $x = 1$ e $y = -2$, ya que ese par es solución de cada una de las ecuaciones.

- Como puede verse, los valores solución, $x = 1$ e $y = -2$, se corresponden con las coordenadas del punto $(1, -2)$, que es el de corte de las rectas asociadas a cada una de las ecuaciones.

- Hay varios métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción.

Sustitución: Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra ecuación. Se obtiene así una nueva ecuación con una sola incógnita, cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo: Para resolver el sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$:

1º. Se despeja y en la segunda ecuación ($y = 1 - 2x$).

2º. Se sustituye su valor a la primera ecuación: $4x - 2(1 - 2x) = 3$.

3º. Se resuelve la nueva ecuación: $4x - 2(1 - 2x) = 3 \Rightarrow 4x - 2 + 4x = 3 \Rightarrow 8x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{8}$.

4º. El valor $x = \dfrac{5}{8}$ se lleva a la ecuación despejada: $y = 1 - 2 \cdot \dfrac{5}{8} = 1 - \dfrac{10}{8} = -\dfrac{2}{8}$.

La solución del sistema es: $x = \dfrac{5}{8}$ e $y = -\dfrac{2}{8}$.

Igualación: Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualando ambas incógnitas se obtiene otra ecuación. La solución de esta nueva ecuación permite hallar la solución del sistema.

Ejemplo: En el sistema $\begin{cases} 4x+2y=-3 \\ 3x-y=1 \end{cases}$, puede despejarse la incógnita y en las dos ecuaciones.

Se obtiene: $\begin{cases} y=-2x-\dfrac{3}{2} \\ y=3x-1 \end{cases}$.

Igualando: $-2x-\dfrac{3}{2}=3x-1 \Rightarrow 1-\dfrac{3}{2}=5x \Rightarrow -\dfrac{1}{2}=5x \Rightarrow x=-\dfrac{1}{10}$.

El valor $x=-\dfrac{1}{10}$ se lleva a la segunda ecuación: $y=3\cdot\left(-\dfrac{1}{10}\right)-1=-\dfrac{3}{10}-1=-\dfrac{13}{10}$.

La solución del sistema es: $x=-\dfrac{1}{10}$ e $y=-\dfrac{13}{10}$.

Reducción: Se multiplica cada ecuación por un número distinto de 0, con el fin de que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales (u opuestos). Restando (o sumando) ambas ecuaciones se obtiene una nueva ecuación cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo: En el sistema $\begin{cases} 4x-2y=2 \\ x-3y=5 \end{cases}$, si se multiplica la segunda ecuación por 4, queda:

$\begin{cases} 4x-2y=2 \\ 4x-12y=20 \end{cases}$. Restando ambas ecuaciones, término a término, se obtiene $10y=-18 \Rightarrow$

$y=-\dfrac{18}{10}=-\dfrac{9}{5}$.

Ese valor $y=-\dfrac{9}{5}$ se sustituye en la segunda ecuación: $x-3\cdot\left(-\dfrac{9}{5}\right)=5 \Rightarrow x=5-\dfrac{27}{5}=-\dfrac{2}{5}$.

La solución del sistema es: $x=-\dfrac{2}{5}$ e $y=-\dfrac{9}{5}$.

Observación: Los sistemas que no tiene solución se llaman incompatibles.
Algebraicamente, al intentar resolver un sistema incompatible se obtiene una contradicción.
Desde el punto de vista gráfico, los sistemas incompatibles se corresponden con dos rectas paralelas.

Ejemplo: En el sistema $\begin{cases} 4x+2y=8 \\ 2x+y=6 \end{cases}$, si se multiplica la segunda ecuación por 2, queda:

$\begin{cases} 4x+2y=8 \\ 4x+2y=12 \end{cases}$. Restando ambas ecuaciones se obtiene $0=-4$, que naturalmente es absurdo. Esto significa que el sistema es incompatible.
Gráficamente, las ecuaciones se corresponden con las rectas paralelas de la figura adjunta.
Para representar la recta $4x+2y=8$ puede despejarse y:
$y=-2x+4$, que pasa por los puntos (0, 4) y (2, 0).
Igualmente, la recta $2x+y=6 \Leftrightarrow y=-2x+6$, pasa por los puntos (0, 6) y (2, 2).