Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

3º B de ESO
Capítulo 9: Geometría en el espacio. Globo terráqueo

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Milagros Latasa y Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Resumen

Muchas plantas distribuyen sus flores en forma esférica buscando un aprovechamiento óptimo del espacio. El átomo de hierro dispone sus electrones en forma de cubo, los sistemas de cristalización de los minerales adoptan formas poliédricas, los panales de las abejas son prismas hexagonales. Éstos son algunos ejemplos de la presencia de cuerpos geométricos en la naturaleza.

Nos movemos en el espacio, caminamos sobre un plano, observamos la línea del horizonte, habitamos y nos movemos habitualmente en poliedros. La información que percibimos por medio de nuestros sentidos la interpretamos en términos geométricos. Precisamos de las fórmulas de áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos para calcular las medidas de los muebles que caben en nuestro salón, o para hacer un presupuesto de la reforma de nuestra vivienda.

La Geometría es una de las ramas más antiguas de las Matemáticas y su estudio nos ayuda a interpretar mejor la realidad que percibimos. En este tema recordarás las fórmulas que estudiaste ya el año pasado y profundizarás sobre sus aplicaciones en la vida real.

ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA

1. PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO EN EL ESPACIO

1.1. Posiciones relativas en el espacio

En el espacio de tres dimensiones en que nos movemos, los elementos geométricos más sencillos son puntos, rectas y planos. Nuestro primer objetivo es describir las posiciones que pueden presentar cualquier pareja de estos elementos. Trata de imaginarlas antes de leer.

Distinguiremos varios casos:

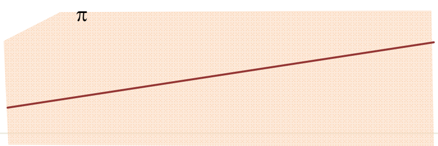
a) Punto – recta:

Puede ser que el punto pertenezca a la recta o que sea exterior a ella.

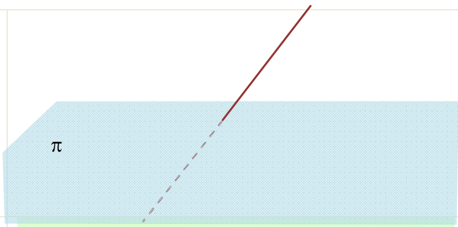
b) Punto – plano:

Lo mismo ocurre con un punto y un plano: sólo hay dos posiciones posibles, el punto está en el plano o fuera del mismo.

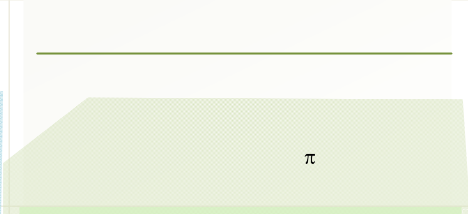
c) Plano – recta:



r está contenida en el plano



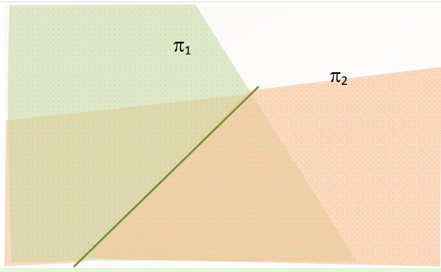
La recta r y el plano π se cortan en un punto



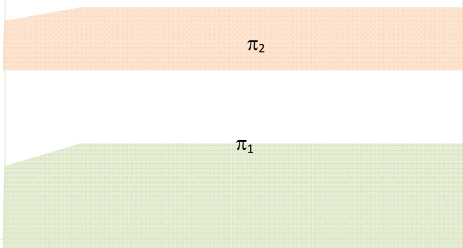
La recta r y el plano π son paralelos

d) Plano- plano:

π_1 y π_2 son iguales y todos sus puntos coinciden.



π_1 y π_2 son secantes. Tienen en común todos los puntos de una recta

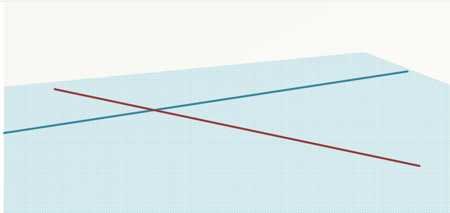


π_1 y π_2 son paralelos. No tienen ningún punto común

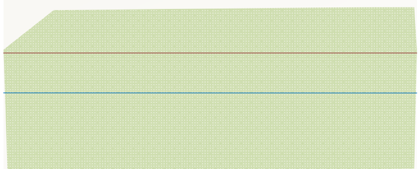
e) Recta- recta:

Dos rectas en el espacio pueden ser *coplanarias* si es posible dibujarlas en un mismo plano, o *no coplanarias* en otro caso.

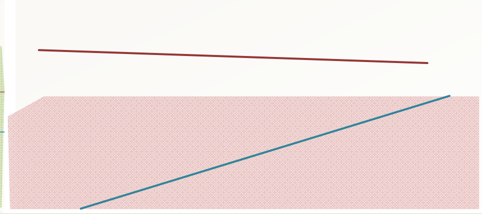
Si dos rectas son coplanarias pueden ser *paralelas*, si tienen la misma dirección, *secantes,* si tienen un punto común, o *coincidentes* si tienen comunes todos sus puntos. Si dos rectas son no coplanarias no tienen ningún punto común y se dice que las dos rectas *se cruzan.*



r y *s* son secantes.



r y *s* son paralelas.

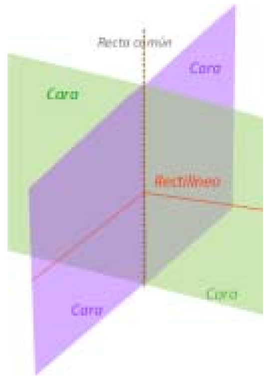


r y *s* se cruzan.

Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Ángulos diedros, triedros y poliedros

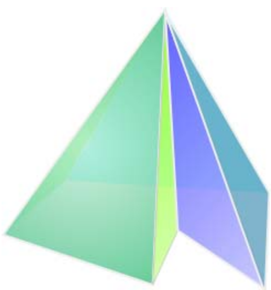
Todo plano divide al espacio en dos semiespacios. Dos planos que se cortan quedan divididos en cuatro semiplanos que pasan por una misma recta y que a su vez dividen al espacio en cuatro regiones.



Cada una de las regiones del espacio comprendida entre dos semiplanos que tienen una recta común, se llama *ángulo diedro*. Los semiplanos que lo definen se llaman *caras* del ángulo diedro y la recta común *arista.*

Si en un diedro trazamos dos perpendiculares a la arista en el mismo punto, situadas cada una de ellas en una cara, el ángulo que forman dichas perpendiculares se llama *ángulo rectilíneo del diedro.*

Un ángulo poliedro es la región del espacio limitada por tres o más semiplanos que son secantes dos a dos y que tienen un punto común que se llama *vértice*. Cada semiplano es una cara del poliedro y las rectas intersección de las caras son las *aristas* del ángulo poliedro.



La suma de los ángulos de los diedros que forman un ángulo poliedro debe ser menor que 360º

En el caso en que un ángulo poliedro tenga exactamente tres caras, se llama *triedro*.

Ejemplo:

Observa cualquiera de las esquinas del techo de la habitación en la que estás. Cada una de ellas es el vértice de un triedro en el que las caras son dos paredes consecutivas y el techo.

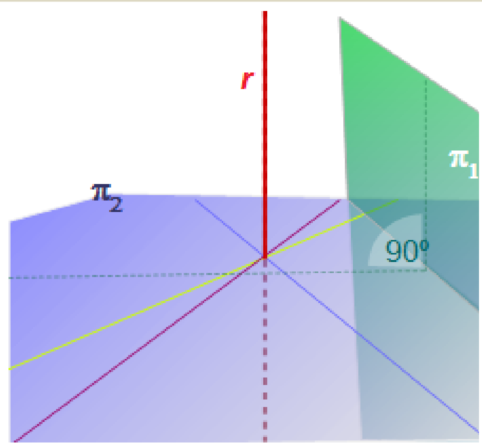
1.3. Perpendicularidad en el espacio

En el espacio debemos tratar varios casos de perpendicularidad.

Dos planos son perpendiculares si los cuatro ángulos rectilíneos que determinan, son ángulos rectos.

Una recta es perpendicular a un plano si lo corta y es perpendicular a cualquier recta que esté contenida en el plano.

Dos rectas son *perpendiculares* si forman un ángulo recto. Es el caso más sorprendente por dos razones en primer lugar en el espacio dos rectas pueden ser perpendiculares sin cortarse y en segundo hay infinitas rectas perpendiculares a una recta *r* dada y que pasan por un punto P dado. Todas ellas están contenidas en un plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P.



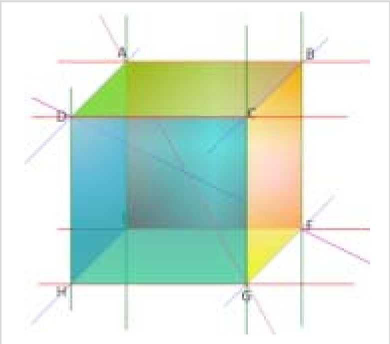
es perpendicular a π_2 y a todas las rectas contenidas en π_2.

Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares

Actividades resueltas

- *Busca un ejemplo en la figura de:*

a) Planos paralelos. b) Planos perpendiculares. c) Rectas paralelas. d) Rectas perpendiculares y coplanarias. e) Rectas perpendiculares y no coplanarias. f) Recta y plano paralelos.



a) El plano que contiene a la cara *ABCD* es paralelo al plano que contiene a la cara *EFGH*.

b) El plano que contiene a la cara *ABCD* es perpendicular a los planos que contienen a las caras *DCGH*, *CBFG*, *ABFE* y *ADHE*.

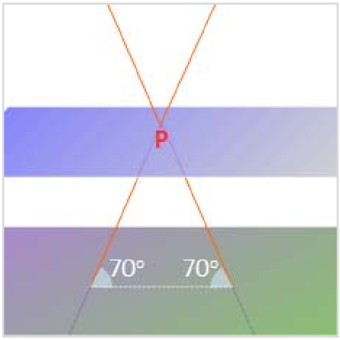
c) La recta que pasa por *A* y *B* es paralela a la recta que pasa por *D* y *C*, a la recta que pasa por *E* y *F*, y a la recta que pasa por *H* y *G*.

d) La recta que pasa por *H* y *G* es perpendicular a la recta que pasa por *G* y *F*, y ambas están en el plano que contiene a la cara *EFGH*, por lo que son también coplanarias.

e) La recta que pasa por *H* y *G* es perpendicular a la recta que pasa por *A* y *D*. Estas dos rectas pertenecen a planos diferentes.

f) La recta que pasa por *A* y *B* es paralela al plano que contiene a la cara *EFGH*.

- *Si dos planos paralelos determinan segmentos iguales al cortar a dos rectas, ¿puedes afirmar que las rectas son paralelas?*



No necesariamente. Observa la figura de la derecha y te darás cuenta. Las rectas del dibujo determinan un triángulo isósceles al cortar a dos planos paralelos y cortarse entre sí, tal como aparece en la figura. Los segmentos interceptados por los planos al cortar a las dos rectas son iguales, sin embargo, las rectas no son paralelas.

Actividades propuestas

1. Busca en la habitación en la que te encuentras, ejemplos de:

a. Planos paralelos y perpendiculares.
b. Rectas paralelas, rectas perpendiculares y coplanarias, rectas perpendiculares y no coplanarias.
c. Recta paralela a plano, recta y plano secantes, recta contenida en plano.

2. Las hojas de una puerta giratoria forman entre sí 5 ángulos diedros consecutivos e iguales. ¿Cuánto mide cada uno de ellos?

3. Desde un punto interior a una sala de planta hexagonal regular se traza una recta perpendicular a cada pared. ¿Cuánto medirá el ángulo que forman dos perpendiculares consecutivas?

4. Dos triedros tienen las tres caras iguales, ¿se puede asegurar que son iguales? Razona la respuesta.

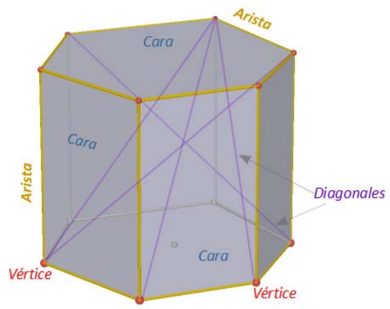
2. POLIEDROS

2.1. Poliedros. Elementos de un poliedro

Un *poliedro* es una región cerrada del espacio limitada por polígonos.

En todo poliedro podemos considerar los siguientes elementos: *caras, aristas, vértices, ángulos diedros* y *poliedros*, así como las *diagonales*.

Las *caras* son los polígonos que lo limitan, las *aristas y vértices* los lados y vértices de los polígonos que forman las caras.



Los *ángulos diedros* están formados por dos caras que tienen una arista común. Los *ángulos poliedros* están formados por varias caras que tienen un vértice común.

Una *diagonal* de un poliedro es un segmento que une dos vértices pertenecientes a caras diferentes.

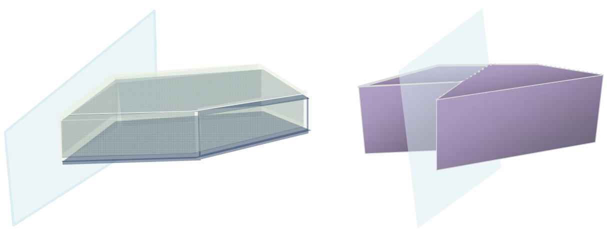
Un *plano diagonal* es un plano que contiene tres vértices que no pertenecen a la misma cara.

2.2. Poliedros convexos. Teorema de *Euler*

Es posible clasificar poliedros atendiendo a diferentes criterios. Si nos fijamos en la amplitud de sus ángulos diedros, se clasifican en ***cóncavos y convexos****.*

Un poliedro es *convexo* si el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro, está dentro del mismo. En poliedros convexos, únicamente uno de los dos semiespacios que determina cada uno de los planos que contienen a las caras, contiene también al resto del poliedro.

Un poliedro es *cóncavo* en caso contrario. En los poliedros cóncavos alguno de los planos que contienen a las caras divide al poliedro en dos cuerpos que pertenecen a semiespacios distintos.



Poliedro convexo   Poliedro cóncavo

En los poliedros convexos se cumple el llamado *Teorema de Euler* que relaciona las caras, vértices y aristas y afirma que en todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2. Si caras, vértices y aristas se representan por sus iniciales, se escribe:

$$C + V = A + 2$$

Existen poliedros cóncavos que cumplen esta relación y poliedros cóncavos que no la cumplen.

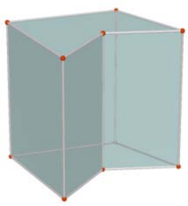
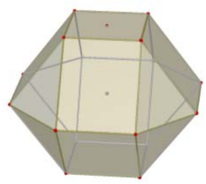
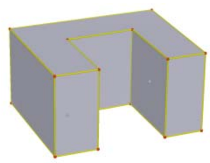
Actividades resueltas

- *Comprueba que los siguientes cuerpos geométricos verifican el teorema de Euler.*

 Hay dos caras ocultas que son cuadriláteros	Este cuerpo geométrico es un poliedro convexo. Tiene 7 caras de las cuales 5 son cuadriláteros, 1 es un pentágono y 1 es un triángulo. Tiene 9 vértices y para calcular el número de aristas sumamos el total de lados de las caras y dividimos entre 2, ya que cada arista es lado de dos caras: Nº de aristas = ——— $C + V = 7 + 9 = 16$ A +2 = 14 + 2 = 16 Cumple el teorema de *Euler*
 Todos los vértices están a la vista	Si se ven todos los vértices, hay dos caras ocultas: una de ellas es un triángulo y la otra es un pentágono cóncavo. Es un poliedro cóncavo. Tiene un total de 6 caras, 6 vértices y Nº de aristas = —— $C + V = 6 + 6 = 12$ A +2 = 10 + 2 = 12 Verifica el teorema de *Euler*

Actividades propuestas

5. Investiga si los siguientes cuerpos son poliedros y, en caso afirmativo, si cumplen el teorema de *Euler*. Indica también si son cóncavos o convexos

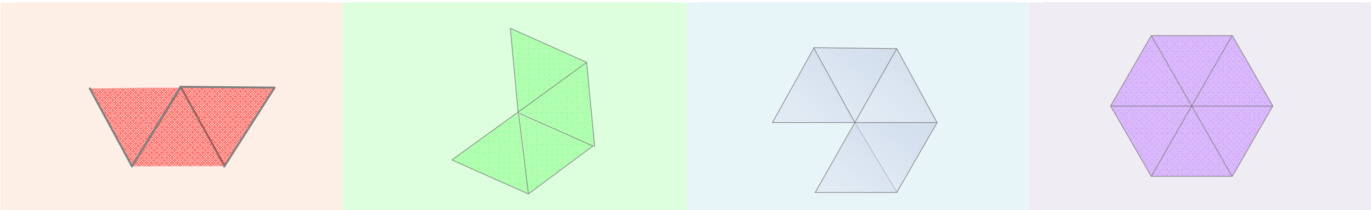
2.3. Poliedros regulares

Un poliedro regular es un poliedro que cumple que todas sus caras son polígonos regulares iguales y que sus ángulos poliedros son iguales.

En todo poliedro regular coinciden el mismo número de caras en cada vértice. Es sencillo probar que sólo existen cinco poliedros regulares.

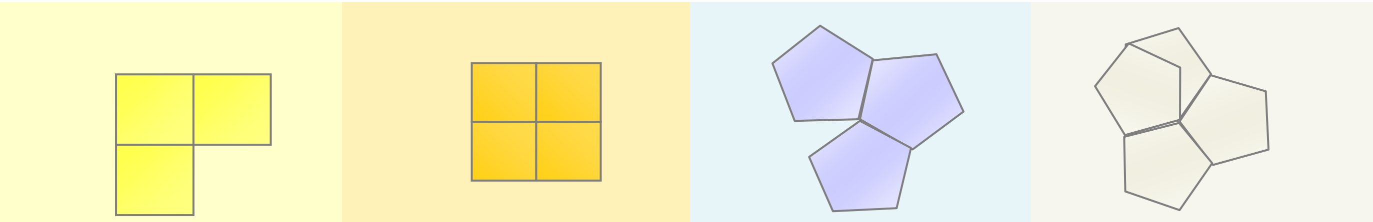
El polígono regular con menos lados es el triángulo equilátero. Busquemos los poliedros regulares que pueden construirse con caras triangulares:

Como mínimo son necesarios tres triángulos por vértice y como máximo pueden concurrir cinco para que sea posible formar un ángulo poliedro



Si unimos tres triángulos equiláteros iguales por vértice, se forma un tetraedro. El octaedro aparece al unir cuatro triángulos equiláteros iguales en cada vértice. Con cinco triángulos equiláteros, también iguales, por vértice, se forma un icosaedro. Si unimos seis triángulos equiláteros en un vértice, la suma de los ángulos de las caras concurrentes es 360º y no se puede formar ninguno ángulo poliedro, así que no hay más poliedros regulares con caras triangulares.

Estudiemos ahora los poliedros regulares que es posible construir con caras cuadradas y pentagonales



Con tres cuadrados iguales en cada vértice construimos un cubo. Al unir cuatro cuadrados en un vértice, la suma de los ángulos en el vértice común a los cuatro es 360º con lo que no podemos formar ningun poliedro mas que el cubo de caras cuadradas.

Sólo es posible construir un poliedro regular con caras pentagonales uniendo tres pentágonos en cada vértice. Es el dodecaedro. Un número mayor de pentágonos por vértice daría una suma de ángulos superior a 360º.

Entonces queda probado que sólo existen cinco poliedros regulares:

Los poliedros regulares son *desarrollables* porque pueden ser construidos a partir de un desarrollo plano formado por todas sus caras.

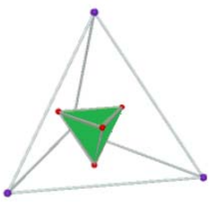
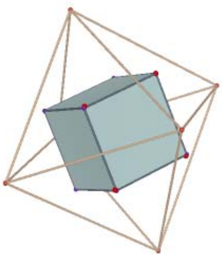
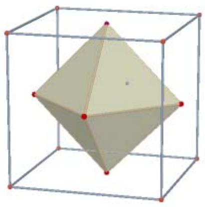
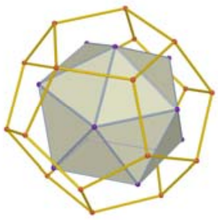
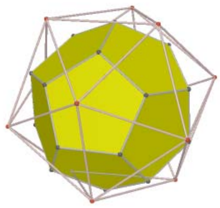
Todos cumplen la relación de Euler para poliedros convexos. Puedes comprobarlo:

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
N° DE CARAS	4	6	8	12	20
N° DE VÉRTICES	4	8	6	20	12
N° DE ARISTAS	6	12	12	30	30
FORMA DE LAS CARAS	TRIANGULARES	CUADRADAS	TRIANGULARES	PENTAGONALES	TRIANGULARES

2.4. Dual de un poliedro regular

Se define el poliedro dual de un poliedro regular como el poliedro resultante de unir los centros de las caras del poliedro inicial y tomarlos como vértices del nuevo poliedro. Fíjate que entonces el número de caras de un poliedro coincide con el número de vértices de su poliedro dual.

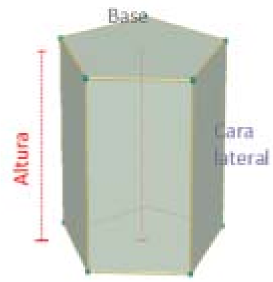
El poliedro dual del tetraedro es el tetraedro. El cubo y el octaedro son duales entre sí. También el dodecaedro es dual del icosaedro y recíprocamente.

Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

2.5. Prismas

Un *prisma* es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.

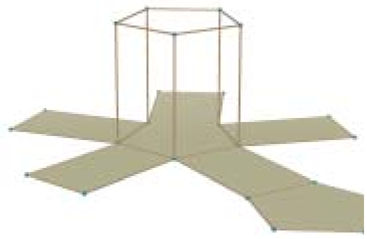


Los prismas son cuerpos desarrollables. El desarrollo de un prisma recto está compuesto por sus dos bases y por tantos paralelogramos como caras laterales tenga.

La altura del prisma es la distancia entre las bases.

Es posible clasificar un prisma atendiendo a diferentes conceptos:

Por la forma de las caras laterales pueden ser *rectos u oblicuos*. Son *rectos* si las citadas caras son rectángulos y son *oblicuos* si son rombos o romboides.



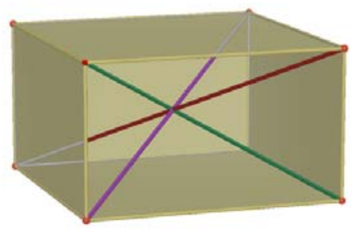
Por la forma de las bases pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales dependiendo de que el polígono de la base sea triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc...

Si además un prisma es recto y tiene polígonos regulares como bases, el prisma se llama *regular*. En cualquier otro caso el prisma se llama *irregular*.

Por la forma de sus ángulos diedros pueden ser cóncavos y convexos.

2.6. Paralelepípedos

Los paralelepípedos son prismas en los que las bases son paralelogramos.



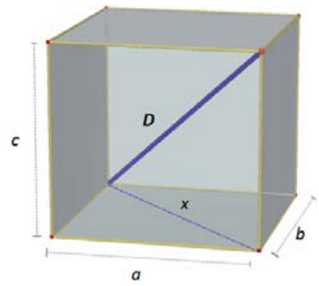
Además, todas las caras laterales son también paralelogramos y las caras opuestas son iguales entre sí por lo que cualquier cara puede tomarse como base.

Los paralelepípedos pueden ser*: cubos* si tienen todas sus caras cuadradas, *ortoedro*s si todas sus caras son rectángulos, *romboedros* si todas sus caras son rombos o *romboiedros* si todas sus caras son romboides.

Una propiedad importante de todos los paralelepípedos es que las cuatro diagonales se cortan en el punto medio.

2.7. Teorema de Pitágoras en el espacio

La diagonal de un ortoedro al cuadrado coincide con la suma de los cuadrados de sus aristas.



Vamos a demostrarlo: Sean *a, b* y *c* las aristas del ortoedro que suponemos apoyado en el rectángulo de dimensiones *a* , *b*. Si *x* es la diagonal de este rectángulo, cumple: $x^2 = a^2 + b^2$. El triángulo de lados *D, x, c* es rectángulo luego: $D^2 = x^2 + c^2$. Y teniendo en cuenta la relación que cumple *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Actividades resueltas

- *Las aristas de la base de una caja con forma de ortoedro miden 10 cm y 11 cm y su altura 8 cm. Estudia si puedes guardar en ella tres barras de longitudes 14 cm, 16 cm y 18 cm.*

El rectángulo de la base tiene una diagonal d que mide: $d = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221} \approx 14{,}9$ cm. Luego la barra más corta cabe apoyada en la base. Calculemos ahora cuánto mide la diagonal del ortoedro:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 10^2 + 11^2 = 285 \Rightarrow D = \sqrt{285} \approx 16{,}9 \text{ cm}$$

Luego, la barra de 16 cm cabe también en la caja pero la de 18 cm no.

Actividades propuestas

6. Es posible demostrar con un rompecabezas el teorema de Pitágoras en el espacio. Te proponemos que lo intentes. Podrás encontrar en la revista y entre los recursos para imprimir las piezas que te ayudarán. En la fotografía se muestra el puzzle resuelto.

7. ¿Es posible construir un prisma cóncavo triangular? ¿Y un prisma cóncavo regular? Razona las respuestas.

8. Entre los poliedros regulares, ¿hay alguno que sea prisma? En caso afirmativo clasifícalo.

9. ¿Basta que un paralelepípedo tenga dos caras rectangulares para que sea un prisma recto?

10. Dibuja un prisma pentagonal regular y comprueba que cumple la relación de Euler.

11. Una caja tiene forma cúbica de 2 dm de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

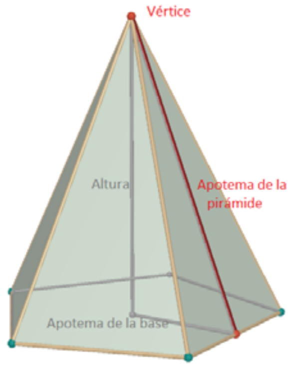
12. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 10 metros de largo, 4 metros de ancho y 3 metros de altura.

13. Clasifica los siguientes poliedros

Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

2.8. Pirámides

Una pirámide es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común como lados tiene la base.



El punto donde convergen todos los triángulos laterales se denomina *vértice* o cúspide.

Las pirámides se pueden clasificar por conceptos análogos a los de los prismas. Así destacamos que las pirámides, según la forma de la base, se clasifican en *triangulares, cuadrangulares, pentagonales,…*

Una pirámide es *regular* cuando lo es el polígono de la base y además las caras laterales son triángulos isósceles iguales. La altura de estos triángulos laterales se llama *apotema de la pirámide*. No debes confundir el apotema de una pirámide regular con el apotema del polígono de la base.

La *altura* de una pirámide es la distancia del vértice a la base. Si una pirámide es regular, coincide con la distancia entre el vértice de la pirámide y el centro del polígono de la base.

Las pirámides son desarrollables. El desarrollo de una pirámide lo forman el polígono de la base y tantas caras triangulares como lados tenga la base. Si la pirámide es regular, los triángulos son isósceles e iguales.

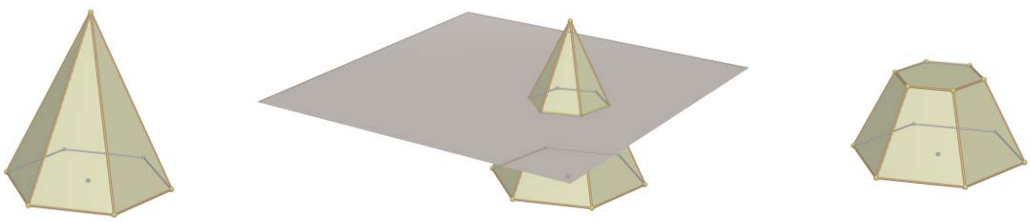
Actividades propuestas

14. ¿Hay alguna pirámide regular que sea poliedro regular? ¿Y pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un ejemplo y en caso negativo, justifica tus respuestas.

15. Dibuja una pirámide hexagonal regular y distingue la apotema de la pirámide del apotema de la base. Dibuja también su desarrollo.

2.9. Tronco de pirámide

Un tronco de pirámide es el poliedro resultante al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base. Las bases son polígonos semejantes y las caras laterales son trapecios.



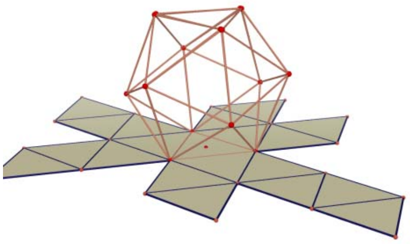
Un tronco de pirámide es regular cuando es una porción de pirámide regular. En este caso las caras laterales son trapecios isósceles y las bases son polígonos regulares semejantes.

3. ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UN POLIEDRO

3.2. Área total de un poliedro regular

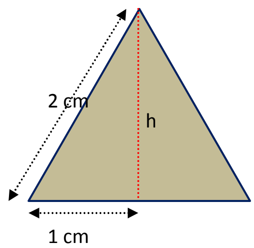
Como las caras de los poliedros regulares son iguales, el cálculo del área total de un poliedro regular se reduce a calcular el área de una cara y después multiplicarla por el número de caras.

Actividades resueltas



- *Calcula el área total de un icosaedro de 2 cm de arista.*

Todas sus caras son triángulos equiláteros de 2 cm de base. Calculamos la altura h que divide a la base en dos segmentos iguales



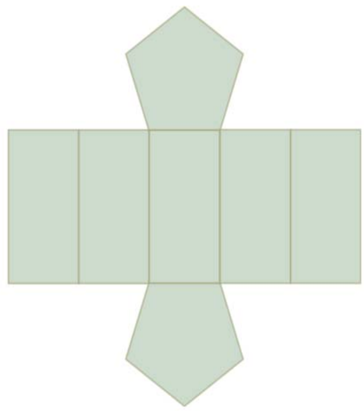
$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$ cm

Luego el área de una cara será:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b.h}{2} = \frac{2.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$$ y por tanto Área icosaedro = 20 ‾ cm^2

3.3. Áreas lateral y total de un prisma

El área lateral de un prisma es la suma de las áreas de las caras laterales.



Como las caras laterales son paralelogramos de la misma altura, que es la altura del prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma de las áreas de las caras laterales =

= Perímetro de la base · altura del prisma.

Si denotamos por h la altura y por P_B el perímetro de la base:

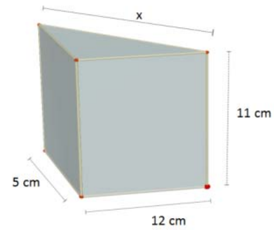
Área lateral = $A_L = P_B \,.\, h$

El área total de un prisma es el área lateral más el doble de la suma del área de la base:

Área total = $A_T = A_L + 2.\, A_B$

Actividades resueltas

- *Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular recto de 11 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm.*



Calculamos en primer lugar la hipotenusa del triángulo de la base:

$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13$ cm

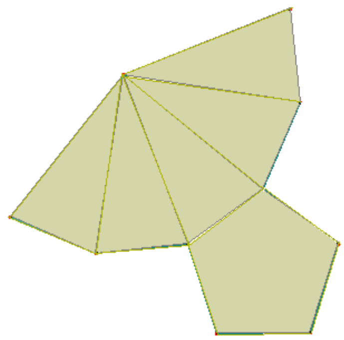
$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm$; $A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$

$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2$ $\quad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$

3.4. Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide regulares

El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de las caras laterales.

Desarrollo de pirámide pentagonal regular



Son triángulos isósceles iguales por lo que, si la arista de la base mide *b*, el apotema de la pirámide es *Ap* y la base tiene *n* lados, este área lateral es:

$$\text{Área lateral} = A_L = n \cdot \frac{b \cdot Ap}{2} = \frac{n \cdot b \cdot Ap}{2}$$

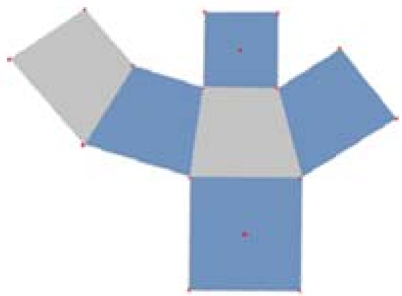
y como $n \cdot b$ = Perímetro de la base

$$A_L = \frac{P_B \cdot Ap}{2} = \frac{\text{Perímetro de la base} \cdot \text{Apotema de la pirámide}}{2}$$

El área total de una pirámide es el área lateral más el área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B$$

Desarrollo de tronco de pirámide cuadrangular



Un tronco de pirámide regular es un cuerpo geométrico desarrollable. En su desarrollo aparecen tantas caras laterales como lados tienen las bases. Todas ellas son trapecios isósceles.

Si *B* es el lado del polígono de la base mayor, *b* el lado de la base menor, *n* el número de lados de las bases y *Ap* es la altura de una cara lateral

$$\text{Área lateral} = A_L = n \cdot \frac{(B+b) \cdot Ap}{2} = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} =$$

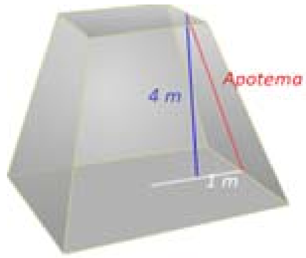
$$= \frac{\text{Suma de perímetro de las bases} \cdot \text{Apotema del tronco}}{2}$$

El área total de un tronco de pirámide regular es el área lateral más la suma de áreas de las bases:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Actividades resueltas

- *Calculemos el área total de un tronco de pirámide regular de 4 m de altura si sabemos que las bases paralelas son cuadrados de 4 m y de 2 m de lado.*



En primer lugar calculamos el valor del apotema. Teniendo en cuenta que el tronco es regular y que las bases son cuadradas se forma un triángulo rectángulo en el que se cumple:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12 \text{ m}$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} = \frac{(16+8) \cdot 4{,}12}{2} = 49{,}44 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 = 69{,}44 \text{ m}^2$$

Actividades propuestas

16. Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular regular sabiendo que las aristas de las bases miden 2 cm y cada arista lateral 8 m.

17. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 63 m^2 y tiene 7 m de altura. Calcula el perímetro de la base.

18. El lado de la base de una pirámide hexagonal regular es de 6 cm y la altura de la pirámide 10 cm. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.

19. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 4 y 7 dm y que la altura de cada cara lateral es de 8 dm.

20. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm^2, calcula el apotema de la pirámide y su altura.

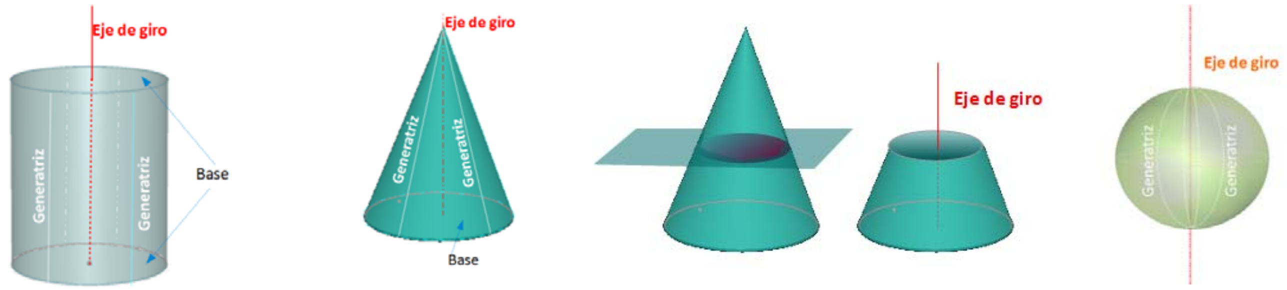
4. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

4.1. Cuerpos de revolución: Cilindros, conos y esferas

Los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos que se obtienen al hacer girar una línea alrededor de una recta fija denominada *eje*. La línea que gira se llama *generatriz*.

También puede obtenerse un cuerpo de revolución mediante el giro de una figura plana alrededor de un eje de giro.

Los principales cuerpos de revolución son: *cilindros, conos* y *esferas*.

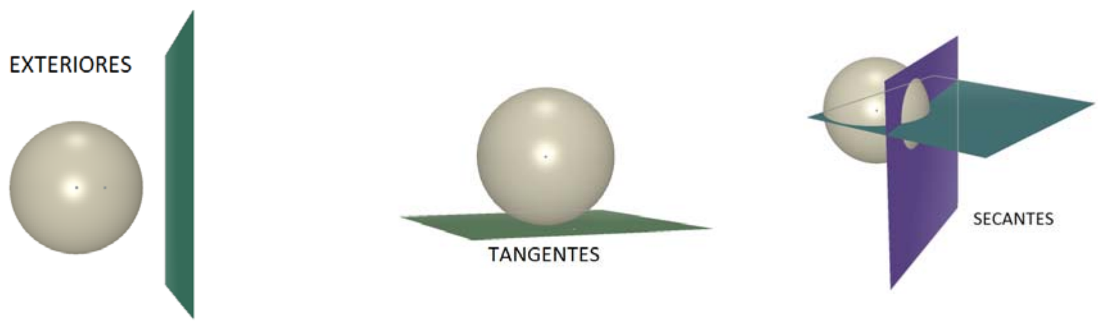


CILINDRO CONO TRONCO DE CONO ESFERA

La generatriz de un cilindro es una recta paralela al eje de giro. La de un cono es una recta secante con el eje y la de una esfera es una semicircunferencia cuyo centro está en el eje de giro

4.2. La esfera. Intersecciones de planos y esferas

Una esfera y un plano pueden ser exteriores, tangentes y secantes. Si son secantes, su intersección es siempre un círculo. Si el plano es tangente, la intersección se reduce a un punto. Y si son exteriores, es el conjunto vacío. Puedes comprenderlo con facilidad pensando en una esfera (una naranja, por ejemplo) y un plano (el corte que haces con un cuchillo).



La intersección de una superficie esférica con un plano es, por tanto, una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

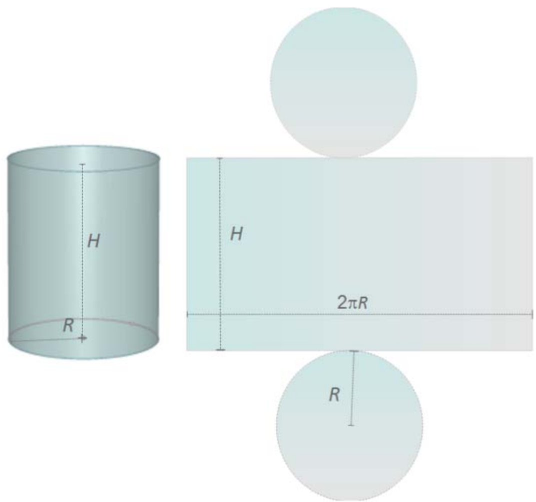
Con ecuaciones nos resulta más complicado pues una superficie esférica tiene una ecuación de segundo grado en dos variables, x e y. Un plano tiene una ecuación de primer grado también en x e y. Las ecuaciones de segundo grado pueden no tener ninguna raíz (en el campo real) con lo que el plano no cortaría a la esfera; tener una raíz doble (con lo que sería tangente) o cortarla (y en ese caso tendríamos una circunferencia).

Si el plano corta a la esfera pasando por el centro de la esfera, la intersección es un círculo máximo. En el caso de la esfera terrestre, el ecuador o los meridianos.

4.3. Áreas lateral y total de un cilindro

El cilindro es un cuerpo geométrico desarrollable. Si recortamos un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y una región rectangular. De esta manera se obtiene su desarrollo.

A partir de éste, podemos ver que el área lateral de cilindro está determinada por el área del rectángulo que tiene como dimensiones la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro.



Supondremos que la altura del cilindro es H y que R es el radio de la base con lo que el área lateral A_L es:

$$A_L = \textit{Longitud de la base . Altura} = (2\pi R).H = 2\pi RH$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área de los dos círculos de que constituyen las bases, obtenemos el área total del cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

4.4. Áreas lateral y total de un cono

También el cono es un cuerpo geométrico desarrollable. Al recortar siguiendo una línea generatriz y la circunferencia de la base, obtenemos un círculo y un sector circular con radio igual a la generatriz y longitud de arco igual a la longitud de la circunferencia de la base.

Llamemos ahora R al radio de la base y G a la generatriz. El área lateral del cono es el área del sector circular obtenido. Para calcularla pensemos que esta área debe ser directamente proporcional a la longitud de arco que a su vez debe coincidir con la longitud de la circunferencia de la base. Podemos escribir entonces:

$$\frac{\textit{A Lateral del cono}}{\textit{Longitud de arco correspondiente al sector}} = \frac{\textit{A total del círculo de radio G}}{\textit{Longitud de la circunferencia de radio G}}$$

Es decir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi G^2}{2\pi G}$ y despejando A_L tenemos:

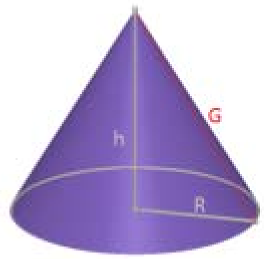
$$A_L = \frac{2\pi R\,\pi G^2}{2\pi G} = \pi R G$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área del círculo de la base, obtenemos el área total del cono.

$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el área total de un cono de 12 dm de altura, sabiendo que la circunferencia de la base mide 18,84 dm .(Toma 3,14 como valor de π)*



Calculamos en primer lugar el radio R de la base:

$$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow \quad R = \frac{18{,}84}{2\pi} \approx \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3 \text{ dm.}$$

Calculamos ahora la generatriz G:

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37 \text{ dm.}$$

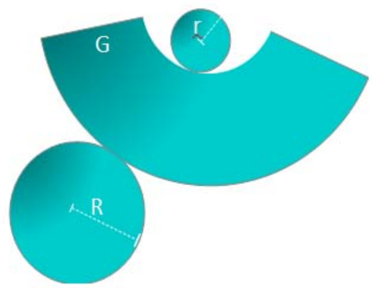
Entonces $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79 \text{ dm}^2$.

4.5. Áreas lateral y total de un tronco de cono

Al cortar un cono por un plano paralelo a la base, se obtiene un tronco de cono. Al igual que el tronco de pirámide, es un cuerpo desarrollable y su desarrollo lo constituyen los dos círculos de las bases junto con un trapecio circular, cuyas bases curvas miden lo mismo que las circunferencias de las bases.

Llamando R y r a los radios de las bases y G a la generatriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$



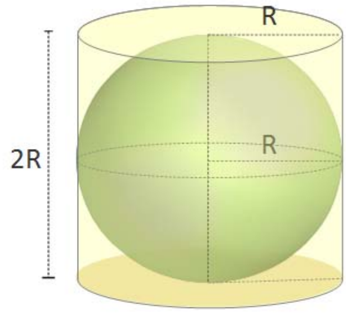
Si a la expresión anterior le sumamos las áreas de los círculos de las bases, obtenemos el área total del tronco de cono:

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

4.6. Área total de una esfera

La esfera no es un cuerpo geométrico desarrollable, por lo que es más complicado que en los casos anteriores encontrar una fórmula para calcular su área.

Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual que el área lateral de un cilindro circunscrito a la esfera, es decir un cilindro con el mismo radio de la base que el radio de la esfera y cuya altura es el diámetro de la esfera.



Si llamamos *R* al radio de la esfera:

$$A_T = (2\pi R)\cdot(2R) = 4\pi R^2$$

El área de una esfera equivale al área de cuatro círculos máximos.

Actividades propuestas

21. Una columna cilíndrica tiene 76 cm de diámetro y 4 m de altura. ¿Cuál es su área lateral?

22. El radio de la base de un cilindro es de 38 cm y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.

23. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 50 dm y su radio de la base 30 dm.

24. La circunferencia de la base de un cono mide 6, 25 m y su generatriz 8 m. Calcula el área total.

25. Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula: a) la longitud de la circunferencia máxima; b) el área de la esfera.

Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

5. VOLUMEN DE UN CUERPO GEOMÉTRICO

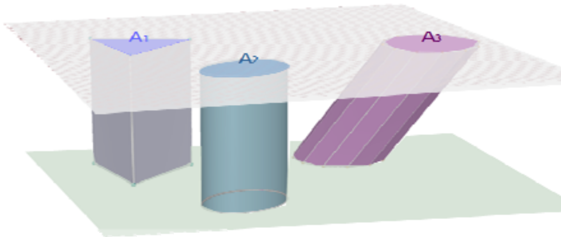
5.1. Principio de *Cavalieri*

Bonaventura Cavalieri, matemático del siglo XVII enunció el principio que lleva su nombre y que afirma:

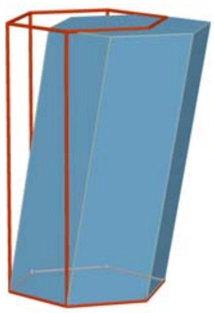
"Si dos cuerpos tienen la misma altura y al cortarlos por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones con el mismo área, entonces los volúmenes de los dos cuerpos son iguales"

Ejemplo:

- En la figura adjunta las áreas de las secciones A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo a las bases, son iguales, entonces, según este principio los volúmenes de los tres cuerpos son también iguales.



5.2. Volumen de un prisma y de un cilindro



El volumen de un prisma recto es el producto del área de la base por la altura. Además, según el principio de *Cavalieri*, el volumen de un prisma oblicuo coincide con el volumen de un prisma recto con la misma base y altura. Si denotamos por V este volumen, A_B el área de la base y *h* la altura:

$$\text{Volumen prisma} = V = A_B \cdot h$$

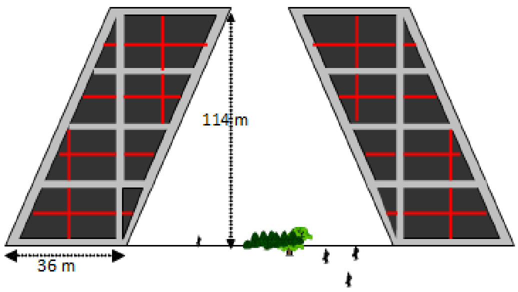
También el volumen de un cilindro, recto u oblicuo es área de la base por altura. Si llamamos *R* al radio de la base, A_B el área de la base y *h* la altura, el volumen se escribe:

$$\text{Volumen cilindro} = V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

Actividades resueltas

- *Las conocidas torres Kio de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa.*

  Cada una de ellas es un prisma oblicuo cuya base es un cuadrado de 36 metros de lado y tienen una altura de 114 metros. El volumen interior de cada torre puede calcularse con la fórmula anterior:



$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744 \text{ m}^3$$

Actividades propuestas

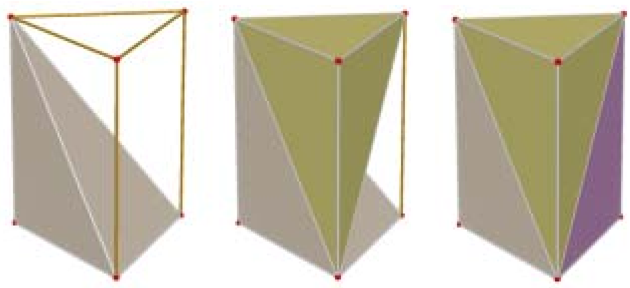
26. Calcula el volumen de un prisma recto de 12 dm de altura cuya base es un hexágono de 4 dm de lado.

27. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 12 cm de diámetro y que el agua alcanza 1 dm de altura.

5.3. Volumen de una pirámide y de un cono

También en los casos de una pirámide o cono, las fórmulas del volumen coinciden en cuerpos rectos y oblicuos.

El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y altura.



$$\text{Volumen pirámide} = V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

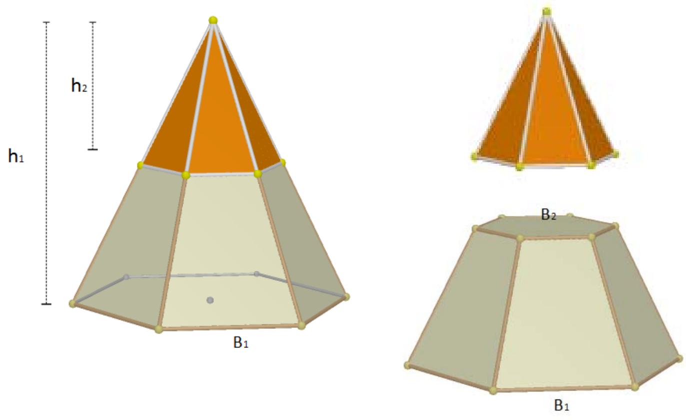
Si comparamos cono y cilindro con la misma base y altura, concluimos un resultado análogo

$$\text{Volumen cono} = V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

5.4. Volumen de un tronco de pirámide y de un tronco de cono

Existe una fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide regular pero la evitaremos. Resulta más sencillo obtener el volumen de un tronco de pirámide regular restando los volúmenes de las dos pirámides a partir de las que se obtiene.

Si representamos por A_{B1} y A_{B2} las áreas de las bases y por h_1 y h_2 las alturas de las pirámides citadas, el volumen del tronco de pirámide es:



Volumen tronco de pirámide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$

El volumen del tronco de cono se obtiene de modo parecido. Si R_1 y R_2 son los radios de las bases de los conos que originan el tronco y h_1 y h_2 sus alturas, el volumen del tronco de cono resulta:

$$\textit{Volumen tronco de cono} = V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el volumen de un tronco de pirámide regular de 10 cm de altura si sus bases son dos hexágonos regulares de lados 7 cm y 3 cm.*

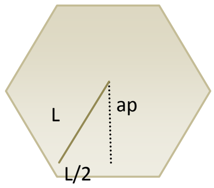


Figura 1

Primer paso: calculamos las apotemas de los hexágonos de las bases:

Para cada uno de estos hexágonos:

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Luego las apotemas buscadas miden: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\,cm$

$$ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\,cm$$

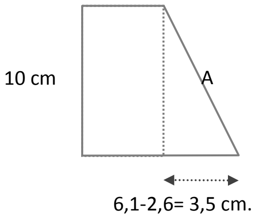


Figura 2

Como segundo paso, calcularemos el apotema del tronco de pirámide

$$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\,cm$$

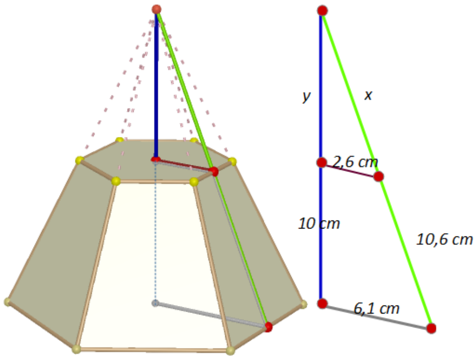


Figura 3

En tercer lugar, calcularemos el valor de los segmentos *x, y* de la figura 3 que nos servirán para obtener las alturas y apotemas de las pirámides que generan el tronco con el que trabajamos:

Por el teorema de *Tales*: $\frac{x}{2{,}6} = \frac{10{,}6 + x}{6{,}1} \Rightarrow 6{,}1\,x = (10{,}6 + x)2{,}6 \Rightarrow 6{,}1\,x - 2{,}6x = 27{,}56 \Rightarrow$

$$x = \frac{27{,}56}{3{,}5} \approx 7{,}9\,cm$$

Entonces la apotema de la pirámide grande es 10,6 + 7,9 = 18,5 cm y la de la pequeña 7,9 cm

Y aplicando el teorema de *Pitágoras*:

$$y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = 55{,}65 \Rightarrow y = \sqrt{55{,}65} \approx 7{,}5 \text{ cm}$$

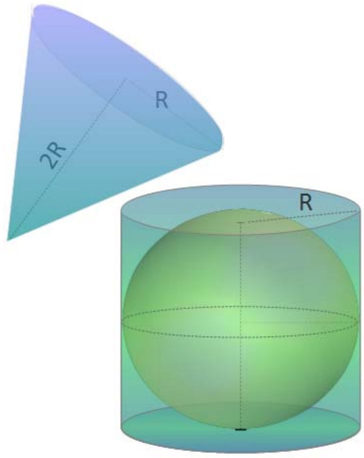
Luego las alturas de las pirámides generadoras del tronco miden 10 + 7,5 = 17,5 cm y 7,5 cm

Por último calculamos el volumen del tronco de pirámide:

$$V = \frac{A_{B1}\,.\,h_1}{3} - \frac{A_{B2}\,.\,h_2}{3} = \frac{1}{3}.\frac{48\,.\,18{,}5\,.\,17{,}5}{2} - \frac{1}{3}.\frac{18\,.\,7{,}9\,.\,7{,}5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066{,}5}{6} = 2412{,}25\,cm^3$$

Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

5.5. Volumen de la esfera



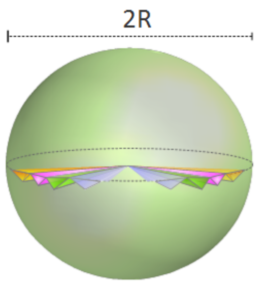
Volvamos a pensar en una esfera de radio R y en el cilindro que la circunscribe. Para rellenar con agua el espacio que queda entre el cilindro y la esfera, se necesita una cantidad de agua igual a un tercio del volumen total del cilindro circunscrito.

Se deduce entonces que la suma de los volúmenes de la esfera de radio R y del cono de altura $2R$ y radio de la base R, coincide con el volumen del cilindro circunscrito a la esfera de radio R. Por tanto:

Volumen $_{\text{esfera}}$ = Volumen $_{\text{cilindro}}$ - Volumen $_{\text{cono}}$ $\Rightarrow$

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Existen demostraciones más rigurosas que avalan este resultado experimental que hemos descrito. Así por ejemplo, el volumen de la esfera se puede obtener como suma de los volúmenes de pirámides que la recubren, todas ellas de base triangular sobre la superficie de la esfera y con vértice en el centro de la misma.



Actividades propuestas

28. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π).
b. Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

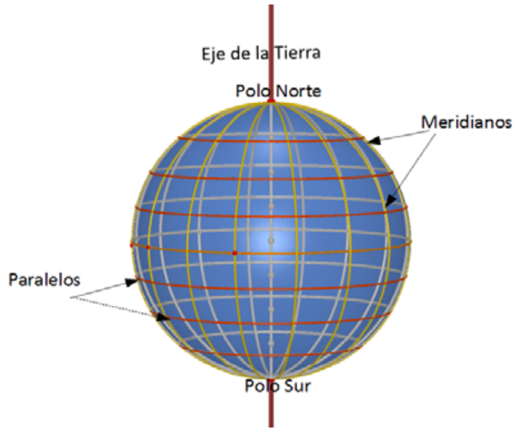
29. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 5 dm sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 10 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 10 dm de altura y 5 dm de radio de la base.

6. GLOBO TERRÁQUEO

6.1. El globo terráqueo

La Tierra tiene una forma de esfera algo achatada por los polos. En su movimiento de rotación gira alrededor de una línea imaginaria que se denomina *eje.* Los *polos geográficos Norte y Sur* son los puntos de corte del eje con la superficie de la Tierra.

Un *globo terráqueo* es una representación tridimensional a escala de la Tierra. Es la representación más precisa que existe porque no presenta distorsiones a la hora de tomar datos para calcular ángulos y distancias.



El resto de las representaciones a escala de la Tierra son bidimensionales y entre ellas destacan *los planisferios* que son proyecciones del globo terráqueo sobre el plano.

El objetivo de estas representaciones de la Tierra es la ubicación precisa de cualquier punto geográfico. Para lograrlo, en el globo terráqueo se definen un conjunto de líneas imaginarias que se denominan *meridianos* y *paralelos*.

Los *meridiano*s son semicircunferencias centradas en el centro de la Tierra y que pasan por los polos. Entre ellos destacan el llamado meridiano de Greenwich o meridiano cero que pasa por Londres y el Antimeridiano, ubicado en el Océano Pacífico.

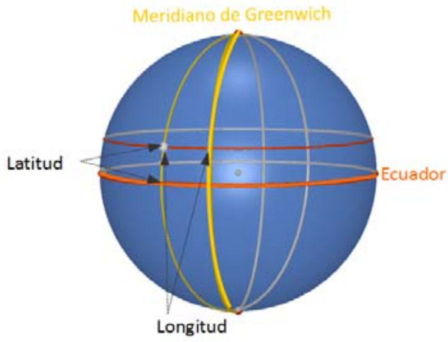
Los *paralelos* son circunferencias que tienen su centro en el eje de la Tierra y que cortan al globo terráqueo. Sólo uno de ellos tiene como centro el de la Tierra. Se denomina *Ecuador o paralelo cero y* es una circunferencia de radio máximo.

Otros paralelos destacados son los *Trópicos de Cáncer* y *Capricornio*, cercanos al Ecuador en el norte y sur respectivamente y también el *Círculo Polar Ártico* en el Polo Norte y el *Círculo Polar Antártico* en el Polo Sur.

El Ecuador divide a la Tierra en dos semiesferas, denominadas *hemisferio norte* (N) y *hemisferio sur*(S). El meridiano de Greenwich divide a la Tierra en los *hemisferios este* (E) y *oeste* (W).

Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

6.2. Longitud y latitud. Coordenadas geográficas



Tomando como sistema de referencia el Ecuador y el meridiano de Greenwich, a cada punto de la Tierra se le asocia una pareja de números que son sus *coordenadas geográficas* y que reciben el nombre de *latitud y longitud*. Estas coordenadas se expresan en grados sexagesimales.

La *latitud* es la distancia que existe entre un punto cualquiera del globo terráqueo y el Ecuador. Se mide sobre el meridiano que pasa por dicho punto.

La *longitud* es la distancia que existe entre un punto cualquiera y el Meridiano de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por el punto.

Si un punto está en el hemisferio norte, diremos que tiene latitud norte y escribiremos latitud N. Análogamente si está en el hemisferio sur, diremos que tiene latitud sur y escribiremos latitud S.

También hablaremos de longitud este y longitud oeste y escribiremos longitud E o longitud W dependiendo de que un punto se encuentre a la izquierda o derecha del meridiano de Greenwich. Suele identificarse la longitud E con longitud negativa y la longitud W con longitud positiva

6.3. Husos horarios

Durante mucho tiempo la hora se determinaba mediante cálculos basados en los movimientos de los astros y la hora oficial era la hora solar. Esto ocasionaba múltiples problemas en los horarios de los transportes entre diferentes localidades por lo que se acordó establecer un horario oficial coordinado. En un principio este horario estaba basado en la llamada hora media de *Greenwich* (**GMT**) que se calculaba haciendo la media de la hora solar de todas las localidades pertenecientes al meridiano de *Greenwich*. Hoy día la hora solar ha sido sustituida por la hora que calculan relojes atómicos mucho más precisos. Con ellos la hora **GMT** ha dado paso a la hora universal coordinada (**UTC**).

La Tierra da una vuelta completa en 24 horas, recorre $360^{\circ} : 24 = 15^{\circ}$ en una hora. Se produce entonces una diferencia de una hora de tiempo por cada diferencia de 15° de longitud entre dos puntos geográficos.

Se llama ***huso horario*** a una zona del globo terráqueo comprendida entre dos meridianos que se diferencian en 15° de longitud. La velocidad de la Tierra en su movimiento de rotación origina 24 *husos horarios*. Partiendo del meridiano de *Greenwich* se numeran según su distancia al Este o al Oeste de Greenwich.

Dentro de cada huso horario todos los relojes deben marcar la misma hora, y entre un huso y el siguiente hay una diferencia de una hora. Generalmente, los husos horarios están determinados por meridianos de una longitud que es múltiplo de 15°; sin embargo, como consecuencia de las fronteras políticas, las delimitaciones pueden seguir líneas que adoptan formas muy irregulares.

Teniendo en cuenta que el movimiento de rotación es un giro de oeste a este, si nos desplazamos de un huso horario a otro en dirección Este- Oeste, debemos retrasar el reloj una hora y, si el desplazamiento se produce de Oeste a Este debemos adelantarlo una hora.

Atravesar el Antimeridiano supone el cambio de fecha, exactamente un día.

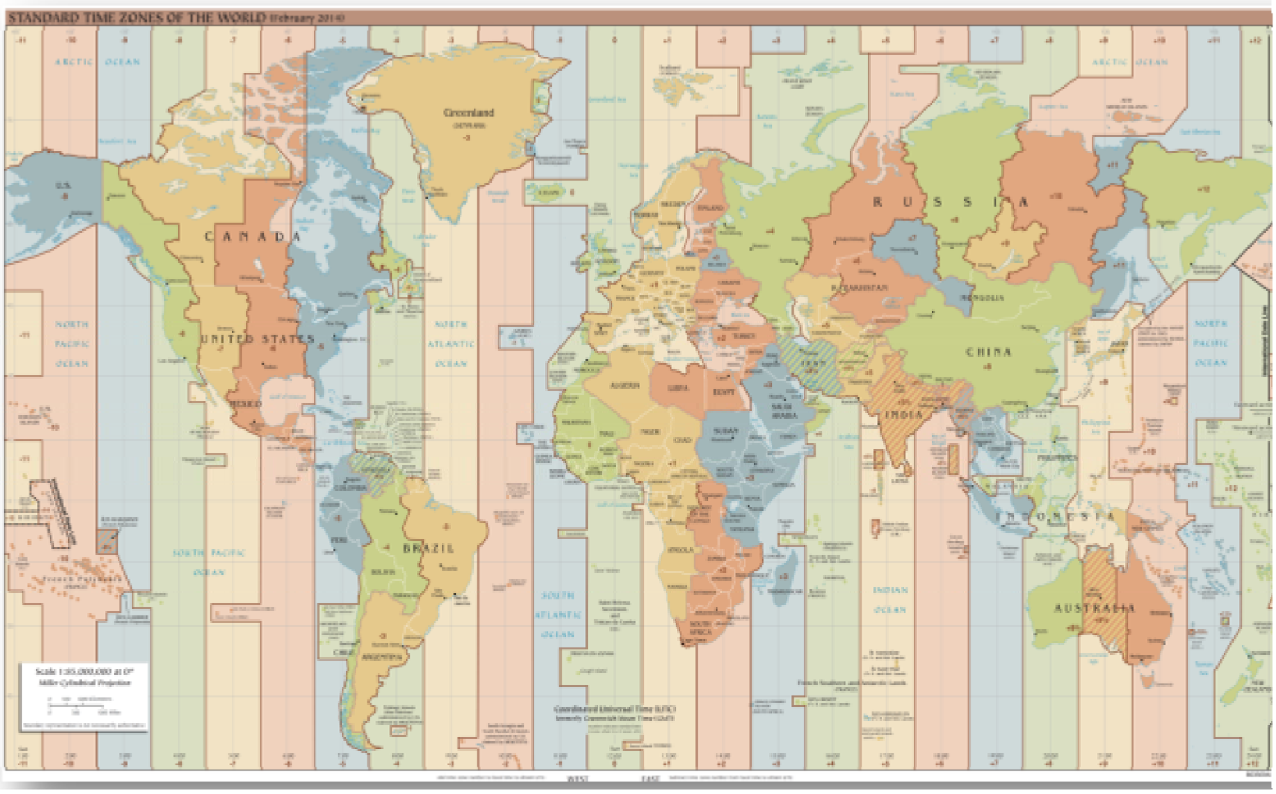
Actividades propuestas

30. Un avión recorre 20º en dirección Oeste a lo largo del Ecuador. Si llega a un punto cuya longitud es de 170º Este, ¿cuáles son las coordenadas del lugar de partida?

31. Juan sale de su casa y recorre 10 Km en dirección sur, 20 Km hacia el este y 10 Km hacia el norte. Si se encuentra de nuevo en casa, ¿Dónde está situada su casa?

32. En la esfera terrestre, ¿qué paralelo mide más?, ¿qué meridiano mide más? Razona tus respuestas.

33. Busca las coordenadas geográficas del lugar en el que vives.



MAPA DE HUSOS HORARIOS DE 30 MARZO 2014 (ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA)

Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Arquímedes pensativo y ***Cicerón y los magistrados descubriendo la tumba de Arquímedes en Siracusa***
ORIGEN DE LAS IMÁGENES: WIKIPEDIA

Arquímedes (287 a.C.- 212 a.C.) Matemático, ingeniero, físico, realizó múltiples aportaciones a la ciencia. Entre otras y como has estudiado en este tema, la demostración de las fórmulas del área y volumen de una esfera. Se dice que resultaron sus descubrimientos favoritos. En su tumba se grabaron un cilindro con una esfera inscrita como homenaje.

Alicia Boole Stott
ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA

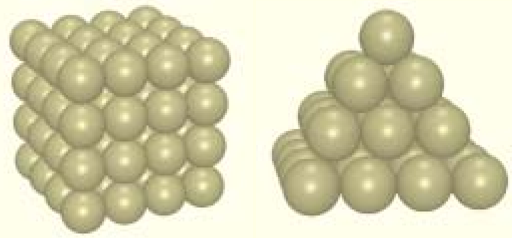
Alicia Boole Stott, (1860 - 1940) hija del matemático George Boole, destacó por su maravillosa capacidad para visualizar la cuarta dimensión. Calculó y representó las secciones de los llamados ***politopos regulares de dimensión 4***, objetos geométricos equivalentes, en un espacio de cuatro dimensiones, a los polígonos regulares en el plano o a los poliedros regulares en el espacio.

Los poliedros regulares pueden ser "aplastados" sobre un plano, eligiendo una cara y proyectando los lados del poliedro desde un punto por encima del centro de esta cara. La figura que se obtiene se llama diagrama de Schlegel. Estos diagramas son ejemplos de grafos. Gran parte de las propiedades de los poliedros se conservan en ellos y ayudan a que muchos problemas se resuelvan con facilidad.

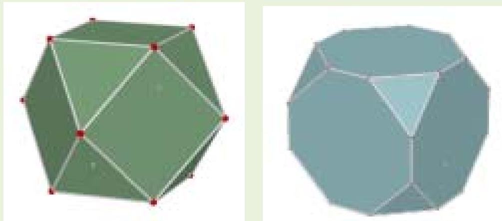
En 1859 Hamilton ideó el siguiente juego: Dado un dodecaedro, si en cada uno de sus vértices se pone el nombre de una ciudad, ¿es posible encontrar un circuito cerrado a través de las aristas del dodecaedro que pase una sola vez por cada ciudad?

Gracias al grafo del dodecaedro, es muy sencillo resolver el problema

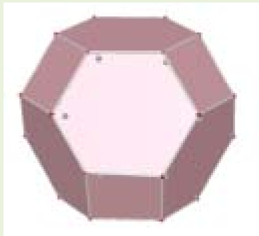
El matemático inglés **Thomas Harriot** (1560-1621), planteó el problema del ***empaquetamiento de esferas*** que estriba en encontrar la forma de apilar esferas del mismo radio de modo que el espacio comprendido entre ellas sea mínimo. El astrónomo alemán **Johannes Kepler** (1571-1630) lo resolvió, llegando a la conclusión de que la mejor colocación era la que entonces se hacía espontáneamente en los barcos para apilar las balas de cañón o la que utilizan los tenderos para apilar las naranjas en los puestos del mercado.

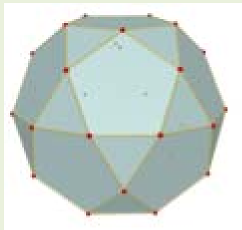


Los ***sólidos arquimedianos*** o **sólidos de Arquímedes** son un grupo de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. En todos los sólidos de Arquímedes concurren el mismo número de caras en cada vértice y con las mismas formas. Algunos de ellos se obtienen truncando los sólidos platónicos (poliedros regulares).



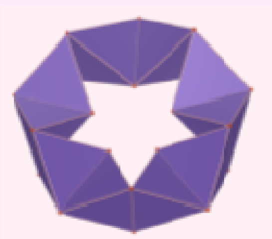
Cubos truncados





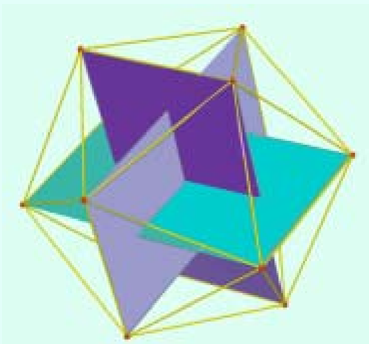
Octaedro truncado *Dodecaedro truncado*

Un anillo de tetraedros o caleidociclo es un anillo tridimensional compuesto por tetraedros unidos por sus aristas. Pueden girar sobre sí mismos en torno a su centro infinitas veces sin romperse ni deformarse.



Entre los materiales encontrarás una plantilla para construir uno con las imágenes de algunas mujeres matemáticas celébres.

Los vértices del icosaedro determinan 3 rectángulos áureos perpendiculares dos a dos. En el icosaedro podemos encontrar un total de 15 rectángulos áureos. Cada uno de ellos tiene dos lados paralelos que son aristas opuestas del poliedro.

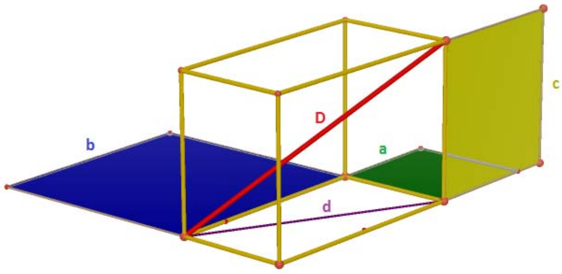


TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL ESPACIO

Si un ortoedro tiene aristas de longitudes *a*, *b*, *c*, según el teorema de Pitágoras, en el espacio, la suma de los cuadrados de las aristas, coincide con el cuadrado de la diagonal, *D*, del ortoedro:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

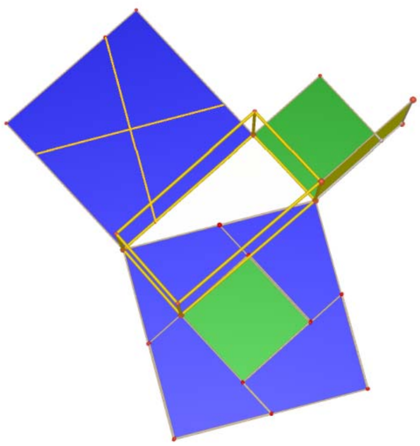
Como consecuencia, la suma de las áreas de los cuadrados de lados iguales a las aristas, coincide con el área del cuadrado que tiene como lado la diagonal del ortoedro.



Construiremos un rompecabezas, basado en la demostración que *Perigal* ideó para demostrar el teorema de Pitágoras en el plano. Hay que aplicar dos veces su método y encontraremos las piezas clave que demuestran el teorema en el espacio.

Al trazar la diagonal *d* de la base, queda dividida en dos triángulos rectángulos de catetos *a* y *b*.

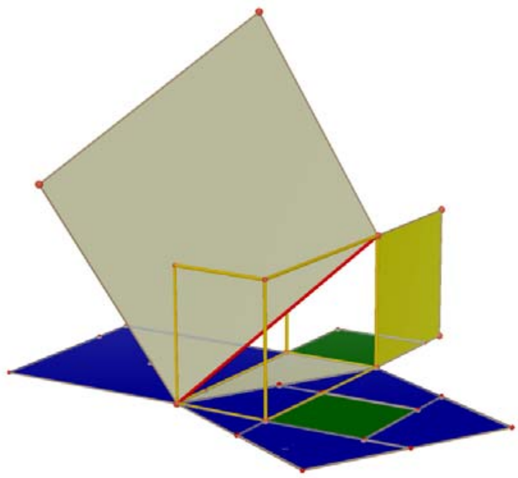
Construimos el cuadrado sobre su hipotenusa y las piezas de *Perigal* que demuestran el teorema de Pitágoras en uno de estos triángulos.



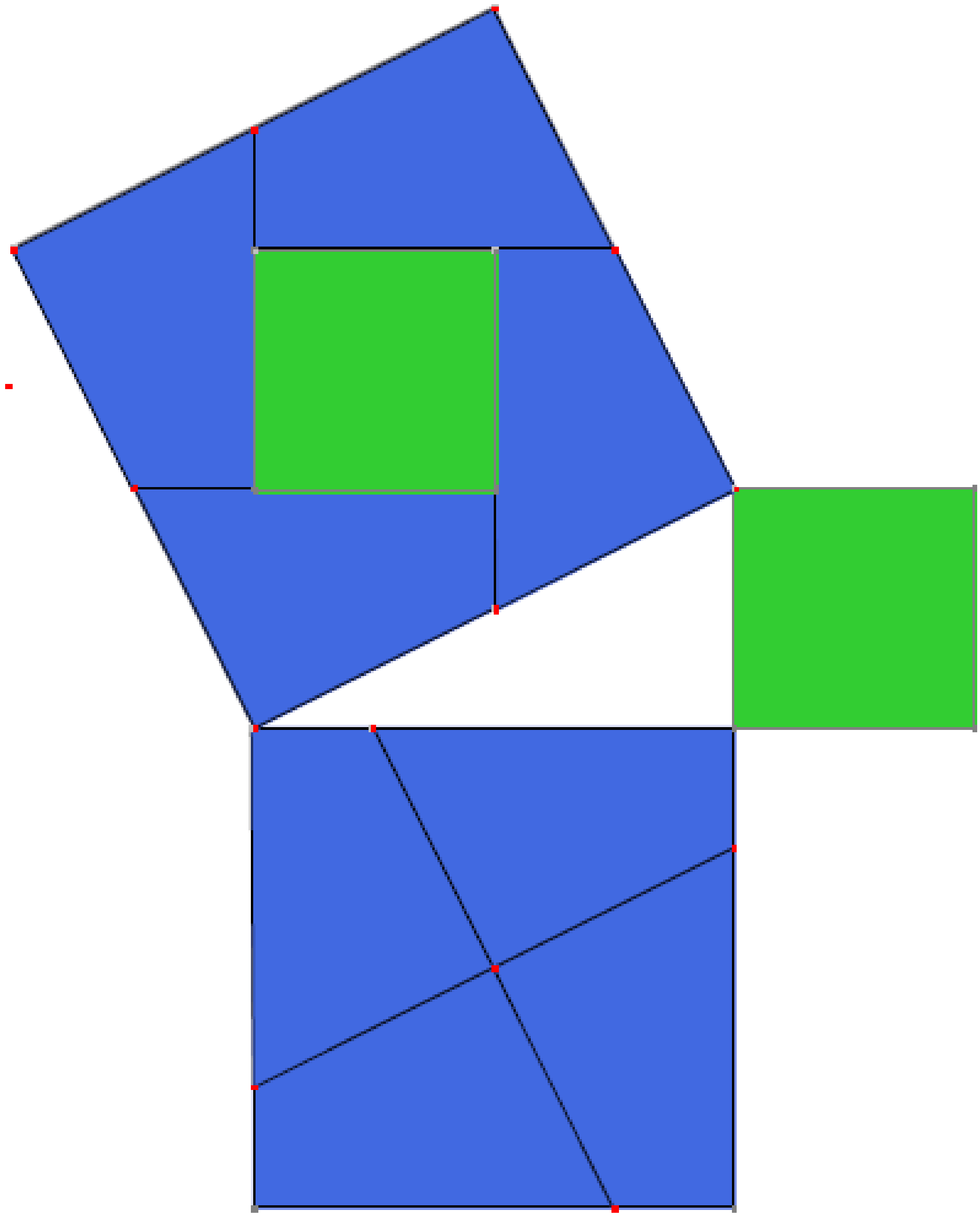
Para ello en el cuadrado construido sobre el cateto mayor (en nuestra figura, *b* de color azul) y, por su centro, trazamos dos segmentos uno paralelo y otro perpendicular a la hipotenusa, de modo que ambos corten a los dos lados del cuadrado. El cuadrado queda dividido en cuatro piezas exactamente iguales que junto con el cuadrado de lado *a*, recubren el cuadrado de lado *d*.

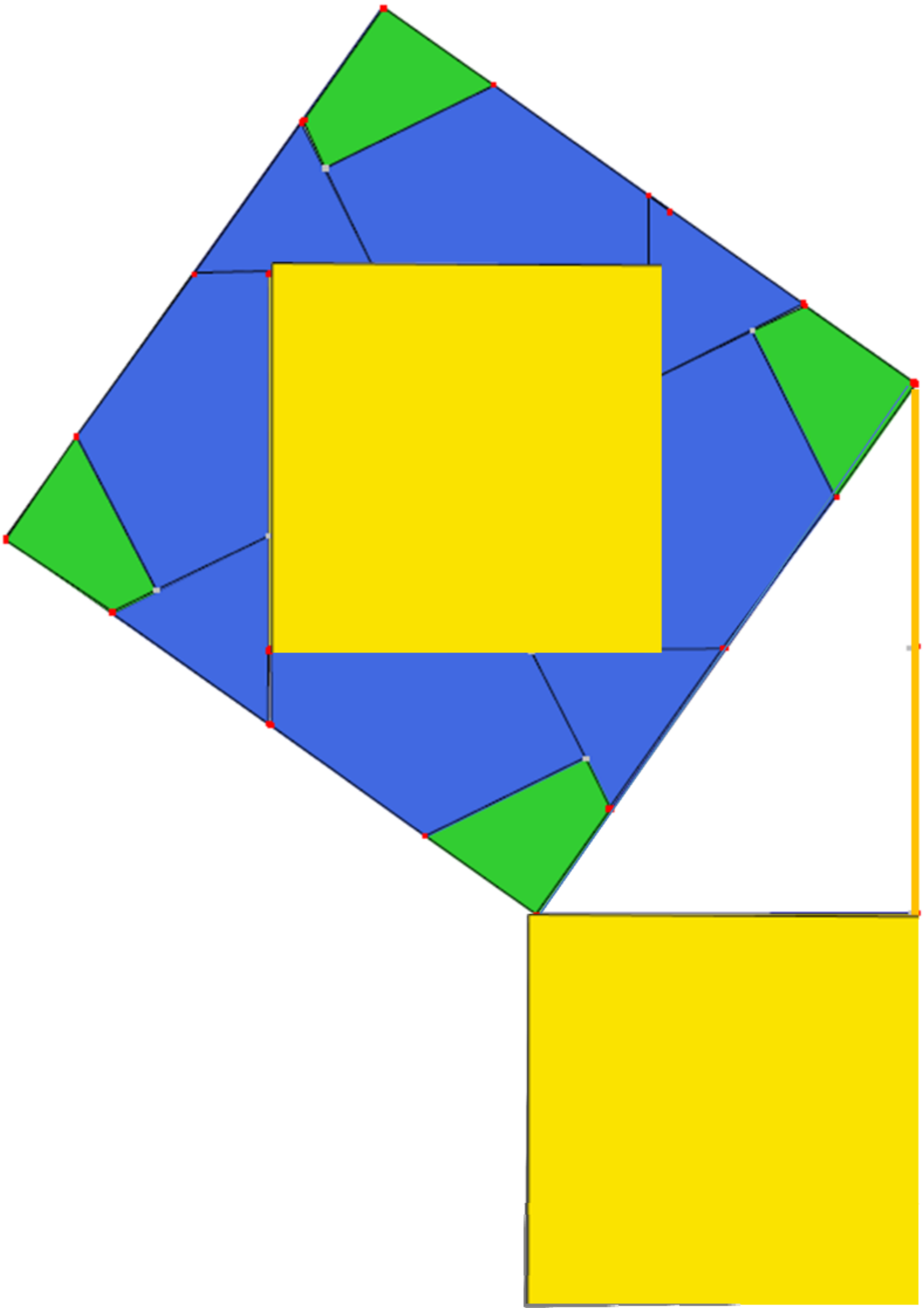
Ahora hay que fijarse en el triángulo rectángulo de catetos *c, d* y cuya hipotenusa es *D* y repetir el proceso anterior, eso sí utilizando el cuadrado de lado *d* recubierto con las piezas azules y el cuadrado verde.

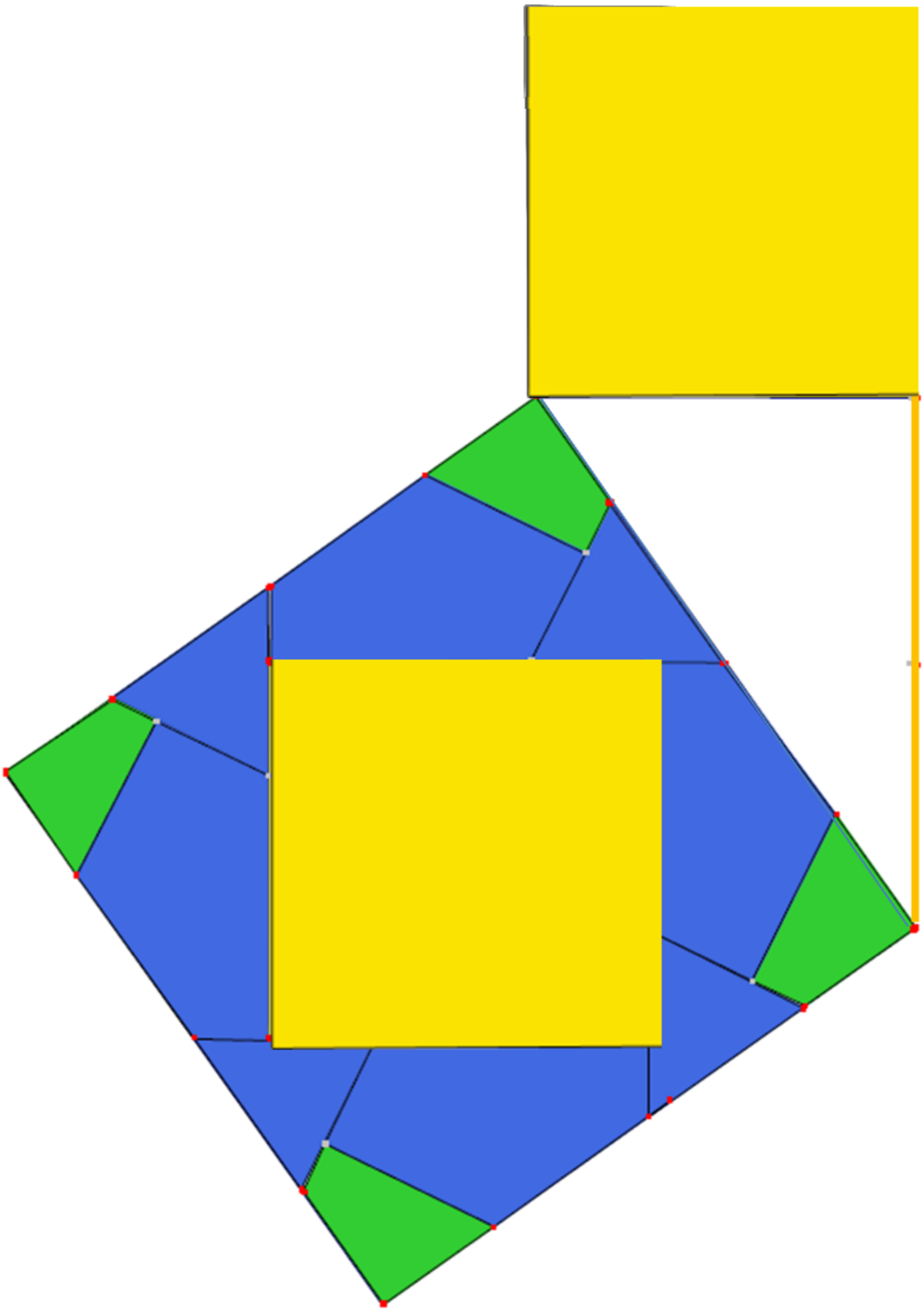
En las páginas siguientes encontrarás las láminas que te permiten construir tu propia demostración. Únicamente tienes que recortar las dos últimas, pegarlas una contra otra y construir un ortoedro con alambre que tenga como dimensiones las longitudes de los lados de los cuadrados verde, azul y amarillo.



Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

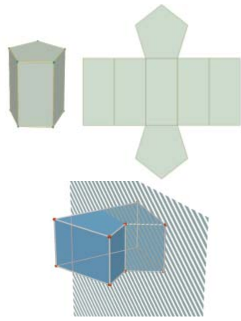
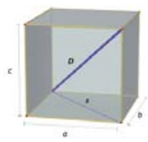


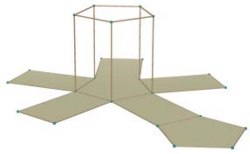
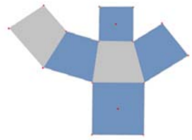
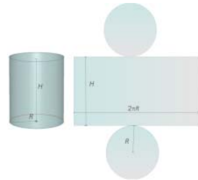
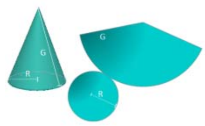


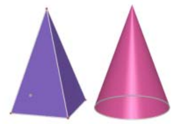
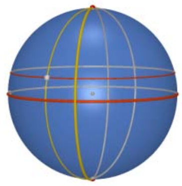


Autoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Poliedro. Elementos de un poliedro. Tipos de poliedros	Un poliedro es una región cerrada del espacio limitada por polígonos. Sus principales elementos son: caras, aristas, vértices, ángulos diedros y poliedros, así como las diagonales. Los poliedros pueden ser cóncavos y convexos dependiendo de que alguna de sus caras sea un polígono cóncavo o ninguna lo sea. Entre los poliedros destacan poliedros regulares, prismas y pirámides.	
Teorema de Euler:	En todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2.	C + V=A+2
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro que cumple que todas sus caras son polígonos regulares iguales y que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas	Un prisma es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases. Pueden ser cóncavos o convexos; rectos u oblicuos, regulares o irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonales… Destacan los paralelepípedos que son prismas con todas sus caras paralelogramos y dentro de éstos los ortoedros que son paralelepípedos con todas sus caras rectangulares	
Teorema de Pitágoras en el espacio	La diagonal de un ortoedro es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus aristas	
Pirámides	Una pirámide es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común, como lados tiene la base. Pueden ser cóncavas o convexas; rectas u oblicuas, regulares o irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonales…	
Tronco de pirámide	Un tronco de pirámide es el poliedro resultante al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base. Las bases son polígonos semejantes y las caras laterales son trapecios.	

Cuerpos de revolución	Los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos que se obtienen al hacer girar una línea alrededor de una recta fija denominada *eje*. La línea que gira se llama *generatriz*. Entre los cuerpos de revolución destacan cilindros, conos y esferas.	
Áreas lateral y total de un prisma	$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2 Área_{Base}$	
Áreas lateral y total de una pirámide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$	
Áreas lateral y total de un tronco de pirámide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{tronco}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base\,1} + Área_{Base\,2}$	
Áreas lateral y total de un cilindro	$A_{Lateral} = 2 \pi R H$ $A_{total} = 2 \pi R H + 2 \pi R^2$	
Áreas lateral y total de un cono	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Áreas lateral y total de un tronco de cono	$A_{Lateral} = (\pi R + \pi r) G$ $A_{Total} = A_{Lateral} + \pi R^2 + \pi r^2$	
Área total de una esfera	$A_{total} = 4 \pi R^2$	
Volumen de un prisma y de un cilindro	$Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	

Volumen de una pirámide y de un cono	$Volumen = \dfrac{Área_{\ base} \ . \ Altura}{3}$	
Volumen de una esfera	$Volumen = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	
Coordenadas geográficas	**Latitud**: Distancia del punto geográfico al Ecuador medida sobre el meridiano que pasa por el punto. **Longitud:** Distancia del punto geográfico al meridiano cero o de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por el punto.	
Husos horarios	Cada **huso horario** es una zona del globo terráqueo comprendida entre dos meridianos que se diferencian en 15º de longitud.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ángulos poliedros. Paralelismo y perpendicularidad. Poliedros: elementos y tipos.

1. Si estamos en una habitación sin columnas, atendiendo al suelo y a sus cuatro paredes, ¿cuántos ángulos diedros se forman?

2. Dobla por la mitad una hoja de papel, construye un ángulo diedro y traza su rectilíneo. ¿Podrías medir la amplitud de diferentes ángulos diedros mediante este rectilíneo?

3. Determina la amplitud de los ángulos diedros que forman las caras laterales de un poliedro que es un prisma recto de base un octógono regular.

4. Dos caras de un triedro miden 60^{o} y 118^{o}, ¿Entre qué valores puede oscilar la otra?

5. ¿Se puede formar un ángulo poliedro con un ángulo de un triángulo equilátero, dos ángulos de un rectángulo y uno de un pentágono regular?

6. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.

7. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?

8. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?

9. Prolonga una pareja de aristas en una pirámide pentagonal, de modo que se obtengan rectas no coplanarias.

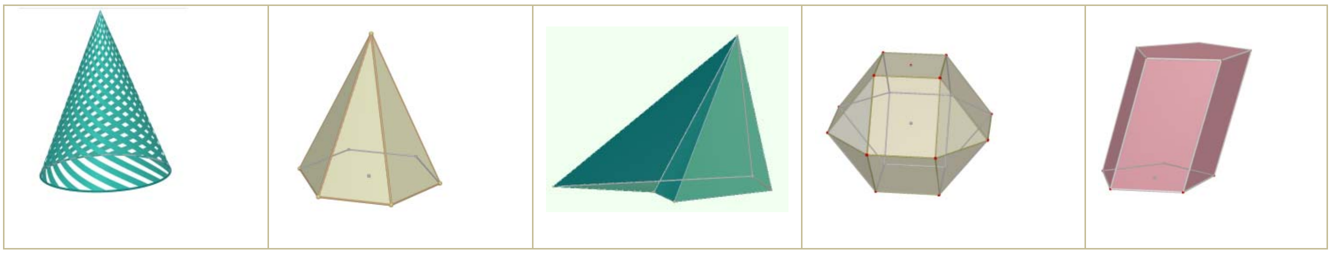
10. Dibuja un prisma regular de base cuadrada y señala: a) dos aristas que sean paralelas, b) dos aristas que sean perpendiculares y coplanarias, c) dos aristas perpendiculares y no coplanarias, d) dos caras paralelas, e) dos caras perpendiculares.

11. Si un poliedro convexo tiene 16 vértices y 24 aristas, ¿cuántas caras tiene? ¿Podría ser una pirámide? ¿Y un prisma?

12. Con 12 varillas de 5 cm de largo cada una, usando todas las varillas ¿qué poliedros regulares se pueden construir?

13. De un prisma sabemos que el número de vértices es 16 y que el número de aristas es 24, ¿cuántas caras tiene?

14. Clasifica los siguientes cuerpos geométricos e indica, cuando sean poliedros, el número de vértices, caras y aristas que tienen. ¿Cuáles cumplen el teorema de Euler?



15. Describe la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo. ¿Es suficiente que un paralelepípedo tenga dos caras paralelas rectangulares para que sea un ortoedro?

Teorema de Pitágoras en el espacio

16. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 cm, 5 cm y 6 cm que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.

17. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?

18. Un vaso de 12 cm de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 4 cm. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 cm?

19. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 cm, 3 cm y 12 cm un bolígrafo de 13 cm de longitud?

20. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y la altura del prisma 8 cm.

21. Si un ascensor mide 1 m de ancho, 1,5 m de largo y 2,2 m de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 m de altura?

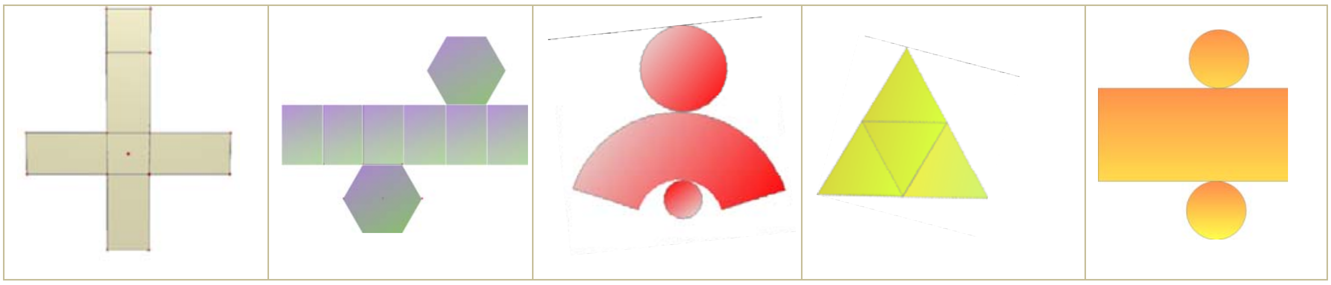
22. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 m de ancho, 8 m de largo y 4 metros de altura ?

23. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3,46 cm.

24. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 cm y 2 cm, y altura 10 cm.

Área lateral, total y volumen de cuerpos geométricos

25. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:



26. Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm. Calcula las áreas lateral y total del prisma.

27. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 4 cm de arista basal y 1 dm de altura y calcula las áreas de la base y total.

28. Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.

29. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3,5 dm, 8,2 dm y 75 cm.

30. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 8 m de altura y 5cm de radio de la base.

31. Calcula el área total de una esfera de 5 cm de radio.

32. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 120 m^2 y su base es un hexágono de 5 m de lado.

33. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 32 dm y la altura de la pirámide es de 4 dm. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

34. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm gira alrededor de uno de sus catetos generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

35. Tres bolas de metal de radios 12 dm, 0,3 m y 4 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

36. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,20 m de diámetro y 20 metros de profundidad?

37. ¿Cuánto cartón necesitaremos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 10 cm y que su altura sea de 25 cm?

38. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y 800 cm^3 de volumen.

39. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,20 m de alto y 248 dm^3 de volumen?

40. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

41. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene 2 cm de arista.

42. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultó un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.

43. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado de la base y 2 m de altura.

44. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

45. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 3, 5 y 7. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 14,5 m.

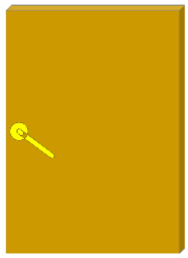
46. Un ortoedro tiene 1 dm de altura y 6 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?

47. Si el volumen de un cilindro de 10 cm de altura es de 314 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro. (Utiliza 3,14 como valor de π).

48. (**CDI Madrid 2011**) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. (Tomar π=3,14). b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

49. (**CDI Madrid 2012**) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.

50. Una circunferencia de longitud 2,24 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen. (Tomar π=3,14).



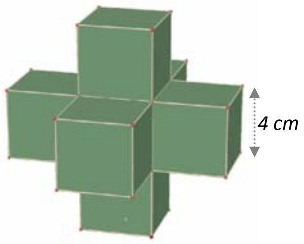
51. Una puerta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho y 4 cm de espesor. El precio de instalación es de 200 € y se cobra 6 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 300 € cada m^3. A) Calcula el volumen de madera de una puerta. B) El coste de la madera de una puerta más su instalación. C) El coste del barnizado de cada puerta, si sólo se cobra el barnizado de las dos caras principales.

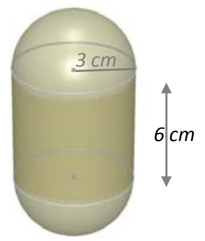
52. El agua contenida en un recipiente cónico de 18 cm de altura y 24 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

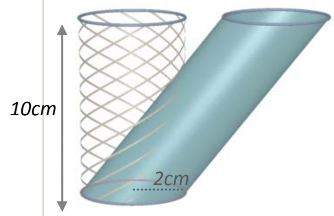
53. Según Arquímedes ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 5 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

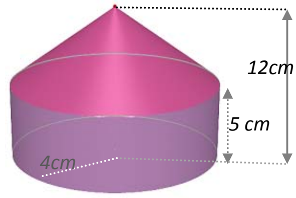
54. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que una circunferencia máxima mide 31,40 m?

55. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

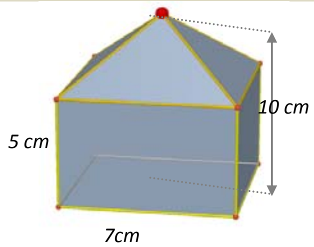




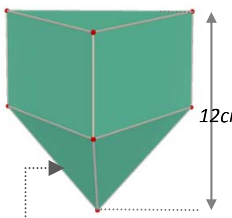




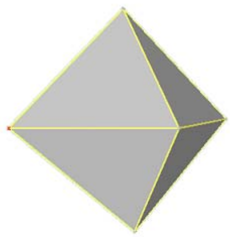
56. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



La base es cuadrada



Tetraedro de 5cm de arista



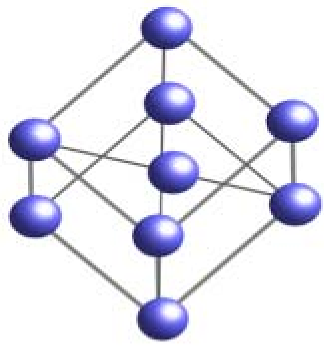
Octaedro de 6cm de arista

Pirámides construidas en el interior de una estructura cúbica de 5 dm de arista.

57. En la construcción de un globo aerostático de radio de 2,5 m se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

58. Calcula el radio de una esfera que tiene 33,51 dm^3 de volumen.

59. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?

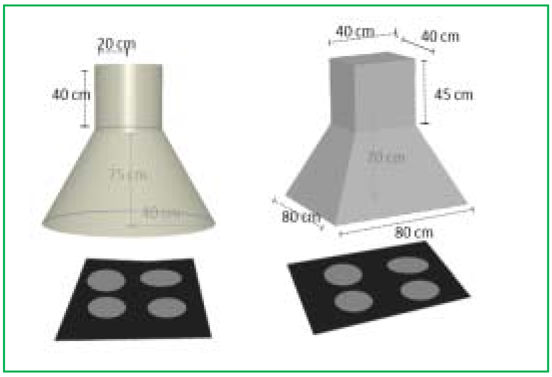


60. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

61. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.

a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?

b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?

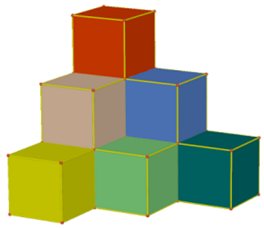


62. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?

63. En una vasija cilíndrica de 8 dm de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,3 metros el nivel del agua?

64. El precio de las tejas es de 14,30 €/m^2 ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 4 metros de altura y 8 metros de lado de la base?

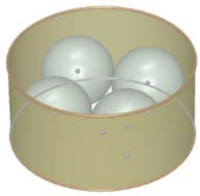
65. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 30 cm y 25 cm de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?



66. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volumen?

67. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1,5 cm y la altura total es de 15 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

68. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 50 cm de altura y bases de radios 20 y 30 cm. Calcula su superficie.



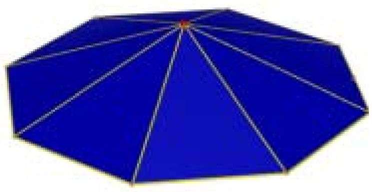
69. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio y 40 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

70. Construimos un cono con cartulina recortando un sector circular de 120^{o} y radio 20 cm. Calcula el volumen del cono resultante.

71. Un embudo cónico de 20 cm de diámetro ha de tener 2 litros de capacidad, ¿cuál será su altura?

72. En un depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de un cuarto de hora?

73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura y 45 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1,80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué espacio de sombra determina?



74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 56 litros de agua. Si tiene 48 cm de largo y 36 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?

75. Un rectángulo de 1 m de base y 10 m de altura gira 360º alrededor de una recta paralela a la altura, que está situada a 2 m de distancia. Calcula la superficie y el volumen del cuerpo que resulta.

76. En un helado de cucurucho la galleta tiene 15 cm de altura y 5 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos gramos de helado contiene?

Husos horarios

77. ¿Qué diferencia de longitud existe entre dos ciudades si la diferencia horaria entre ambas es de 5 horas? ¿Podemos saber si existe diferencia entre sus latitudes?

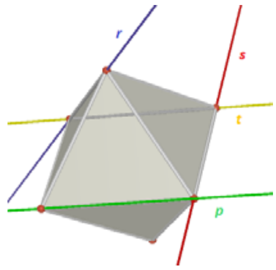
78. Un avión emprende viaje hacia una ciudad situada al oeste de Madrid. El viaje dura 10 horas y su rumbo mantiene en todo momento la latitud de partida. Si la diferencia de longitud entre Madrid y la ciudad de llegada es de 45º y el avión despega del aeropuerto Adolfo Suárez a las 9 de la mañana. ¿A qué hora local aterrizará en la ciudad de destino?

79. La distancia entre Londres y Pekín es de 8149 Km y la distancia entre Londres y Sao Paulo es de 9508 Km, sin embargo en Pekín el reloj marca 7 horas más que en Londres y en Sao Paulo 3 horas menos que en Londres. ¿Cómo explicas esta diferencia?

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	0^o	51^o 30´latitud N
PEKIN	116^o longitud E	40^o latitud N
SAO PAULO	46^o 30´de longitud W	23^o 30´de latitud S

AUTOEVALUACIÓN

1. Cada una de las rectas *r, s, t* y *p* pasa por dos vértices consecutivos de un octaedro tal como se observa en la figura. Señala qué afirmación de las siguientes es verdadera:



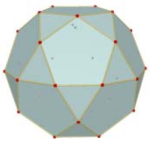
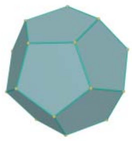
a) Las rectas *r* y *s* son coplanarias y secantes.

b) Las rectas *t* y *p* no son coplanarias.

c) Las rectas *r* y *p* se cruzan.

d) *r* y *s* contienen aristas de una misma cara del octaedro

2. Observa los siguientes cuerpos geométricos y selecciona la opción verdadera:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
					

a) Los cuerpos I), II), IV) y V) cumplen la relación de Euler. **b)** . Hay dos cuerpos de revolución III) y VI).
c) Son poliedros regulares II) y IV). **d)** Son cóncavos I) y V).

3. Si la altura de un prisma de base cuadrada es 10 cm y el lado de la base es 4 cm, su área total es:

a) 160 cm^2 **b)** 320 cm^2 **c)** 400 cm^2 **d)** 192 cm^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. Si sólo contiene las tres cuartas partes de su capacidad, el número aproximado de litros de agua que hay en él es:

a) 13000 L **b)** 9750 L **c)** 3750 L **d)** 3520 L

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 m de altura y 80 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, en total se utilizarán:

a) 38 tejas **b)** 76 tejas **c)** 72 tejas **d)** 36 tejas

6. Una caja de dimensiones $30 \times 20 \times 15$ *cm*, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 cm **b)** 65 cm **c)** 75 cm **d)** 90 cm

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ dm **b)** $\sqrt[3]{75}$ dm **c)** 150 cm **d)** $\sqrt[3]{2250}$ cm

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 **b)** 10 **c)** 42 **d)** 45

9. El área lateral de un tronco de cono que tiene 20 cm de altura y bases de radios 30 y 15 cm, es:

a) $2250\ \pi\ cm^2$ **b)** $900\ \pi\ cm^2$ **c)** $1125\ \pi\ cm^2$ **d)** $450\ \pi\ cm^2$

10. A partir de las coordenadas geográficas de las ciudades A, B , C deduce qué afirmación es correcta

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
A	15^o E	15^o N
B	15^o W	15^o N
C	15^o E	15^o S

a) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas menos.

b) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas más.

c) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas más.

d) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas menos.